

Esame Scritto di Fisica Teorica 1

Traccia di Soluzione

24 settembre 2015

1. Le regole di Feynman sono

- Linee Esterne:

Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)



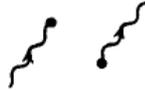
u, \bar{u}

antifermion (in, out)



\bar{v}, v

Spin 1 photon (in, out)



$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$

- Propagatori:

Massless spin 1 photon
(Feynman gauge)



$-\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2}$

Spin $\frac{1}{2}$ fermion



$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$

- Vertice:



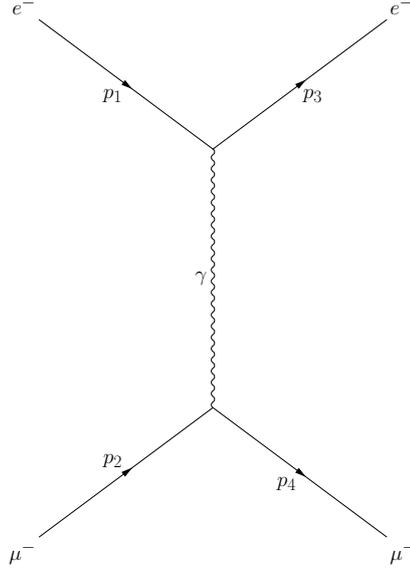
$ie\gamma^\mu$

2. Calcoliamo l'ampiezza non polarizzata del processo $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$. Al primo ordine perturbativo contribuisce un solo diagramma di Feynman. L'ampiezza è

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_e(p_3) ie\gamma_\mu u_e(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{t^2} \bar{u}_\mu(p_4) ie\gamma_\nu u_\mu(p_2). \quad (1)$$

Possiamo calcolare il modulo quadro sommato sulle polarizzazioni finali e mediato su quelle iniziali come

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4t^2} \\ &\sum [\bar{u}_e(p_3) \gamma_\mu u_e(p_1) \bar{u}_\mu(p_4) \gamma^\mu u_\mu(p_2) \bar{u}_\mu(p_2) \gamma^\rho u_\mu(p_4) \bar{u}_e(p_1) \gamma_\rho u_e(p_3)] \\ &= \frac{e^4}{4t^2} \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\rho \right] \\ &\text{Tr} \left[(\not{p}_4 + M) \gamma^\mu (\not{p}_2 + M) \gamma^\rho \right]. \end{aligned} \quad (2)$$



1

Sfruttando le proprietà delle matrici gamma possiamo calcolare facilmente le tracce e ottenere

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[(p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2 - M^2 (p_1 \cdot p_3) - m^2 (p_2 \cdot p_4) + 2m^2 M^2 \right]. \quad (3)$$

La formula precedente in funzione delle variabili di Mandelstam assume la forma

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2t^2} \left[(s - t - u)^2 + (u - s - t)^2 + 8(M^2 + m^2)t \right]. \quad (4)$$

3. Per calcolare queste quantità occorre prima esplicitare la cinematica. In questo caso la struttura è complicata dal fatto che sia nello stato iniziale che nello stato finale abbiamo due particelle massive, per di più con massa diversa tra loro.

Ci viene in aiuto però il fatto che ci vogliamo limitare a trovare la soluzione nel sistema del centro di massa. In tale sistema, essendo un urto elastico, la conservazione dell'impulso implica che

$$|p_1| = |p_2| = |p_3| = |p_4| = p. \quad (5)$$

e possiamo quindi esprimere tutta la cinematica scegliendo come unica variabile dimensionale l'impulso p .

I quadrivettori assumono la seguente forma

$$p_1 = (\sqrt{p^2 + m^2}, 0, 0, p) \quad (6a)$$

$$p_2 = (\sqrt{p^2 + M^2}, 0, 0, -p) \quad (6b)$$

$$p_3 = (\sqrt{p^2 + m^2}, p \sin \theta, 0, p \cos \theta) \quad (6c)$$

$$p_4 = (\sqrt{p^2 + M^2}, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta) \quad (6d)$$

Lo spazio delle fasi a due corpi nel sistema del centro di massa può essere scritto come

$$df = \frac{1}{16\pi^2} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{E_3} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4). \quad (7)$$

Ora usiamo la delta spaziale per eseguire l'integrazione su \mathbf{p}_4 e riscriviamo il tutto come

$$df = \frac{1}{16\pi^2} \frac{p^2}{E_3 E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) dp d\cos\theta d\phi. \quad (8)$$

La delta sulle energie fornisce la relazione che intercorre tra p e l'energia nel centro di massa \sqrt{s} . Abbiamo che

$$\sqrt{s} = \sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (9)$$

La formula finale per lo spazio delle fasi è la seguente

$$df = \frac{1}{8\pi} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2}} d\cos\theta = \frac{1}{8\pi} \frac{p}{\sqrt{s}} d\cos\theta. \quad (10)$$

Il fattore di flusso è invece esprimibile come

$$\Phi = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m^2 M^2} = 4\left(\sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2}\right) p = 4\sqrt{s} p \quad (11)$$

4. Per ricavare la sezione d'urto differenziale occorre combinare l'espressione per lo spazio delle fasi, che è già stata espressa in termini della variabile cinematica desiderata, con quella per l'ampiezza, che va invece riscritta esprimendo in termini di p e θ gli invarianti di Mandelstam.

Utilizzando la cinematica delle Eqs. (6) ricaviamo le seguenti forme per i prodotti scalari inseriti in $|\mathcal{M}|^2$ e per la variabile di Mandelstam t

$$(p_1 \cdot p_2) = \left(\sqrt{p^2 + m^2} \sqrt{p^2 + M^2} + p^2\right) = p^2 (\beta_\mu \beta_e + 1) \quad (12)$$

$$(p_1 \cdot p_3) = (p^2 + m^2 - p^2 \cos\theta) = p^2 (1 - \cos\theta) + m^2 \quad (13)$$

$$(p_1 \cdot p_4) = \left(\sqrt{p^2 + m^2} \sqrt{p^2 + M^2} + p^2 \cos\theta\right) = p^2 (\beta_\mu \beta_e + \cos\theta) \quad (14)$$

$$t = (2m^2 - 2(p_1 \cdot p_3)) = -2p^2 (1 - \cos\theta), \quad (15)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo introdotto le quantità adimensionali

$$\beta_\mu = \sqrt{1 + \frac{M^2}{p^2}} \quad (16)$$

$$\beta_e = \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \quad (17)$$

La forma finale per il modulo quadro dell'ampiezza non polarizzata è

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{(1 - \cos\theta)^2} \left[(\beta_\mu \beta_e + 1)^2 + (\beta_\mu \beta_e + \cos\theta)^2 - \frac{M^2 + m^2}{p^2} (1 - \cos\theta) \right]. \quad (18)$$

La sezione d'urto differenziale è infine

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} |M_{if}|^2 df \quad (19)$$

da cui segue

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi s} \frac{2e^4}{(1-\cos\theta)^2} \left[(\beta_\mu\beta_e + 1)^2 + (\beta_\mu\beta_e + \cos\theta)^2 - \frac{M^2 + m^2}{p^2} (1-\cos\theta) \right]. \quad (20)$$

Questo risultato può essere riscritto in funzione dell'angolo solido Ω e della costante di strutture fine α definita come

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (21)$$

Si trova

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2s} \frac{\alpha^2}{(1-\cos\theta)^2} \left[(\beta_\mu\beta_e + 1)^2 + (\beta_\mu\beta_e + \cos\theta)^2 - \frac{M^2 + m^2}{p^2} (1-\cos\theta) \right]. \quad (22)$$

5. Studiamo ora l'andamento del risultato Eq. (22) o analogamente Eq (20) nelle varie regioni richieste:

- $p^2 \ll m^2 \ll M^2$ L'andamento della sezione d'urto è divergente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{Mm}{p^4}. \quad (23)$$

- $p^2 \sim m^2 \ll M^2$: In questo regime abbiamo

$$\beta_\mu \sim \frac{M}{m} \gg 1 \sim \beta_e \quad (24)$$

quindi l'andamento è dominato dai termini in β_μ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s(1-\cos\theta)^2} \beta_\mu^2 \beta_e^2. \quad (25)$$

- $m^2 \ll p^2 \ll M^2$: In questo regime abbiamo sempre

$$\beta_\mu \sim \frac{M}{m} \gg 1 \sim \beta_e \quad (26)$$

quindi l'andamento è sempre

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s(1-\cos\theta)^2} \beta_\mu^2 \beta_e^2 \quad (27)$$

come nel caso precedente.

- $m^2 \ll p^2 \sim M^2$: In questo regime abbiamo

$$\beta_e \approx 1 \quad (28)$$

$$p^2 \beta_\mu = E = \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (29)$$

L'energia del muone E non è identificabile con la sua massa in quanto l'impulso è dello stesso ordine. Il modo più semplice di scrivere il tutto è in funzione di p , E e M ricordando che vi è un legame tra queste tre variabili.

La sezione d'urto Eq. (22) (o analogamente Eq. (20)) risulta essere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2(E+p)^2} \frac{\alpha^2}{p^2(1-\cos\theta)^2} \left[(E+p)^2 + (E+p\cos\theta)^2 - (M^2)(1-\cos\theta) \right]. \quad (30)$$

- $m^2 \ll M^2 \ll p^2$: ad alte energie anche $\beta_\mu = 1$ o preferibilmente $E = p$. Otteniamo quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8p^2} \frac{\alpha^2}{(1 - \cos\theta)^2} \left[4 + (1 + \cos\theta)^2 \right]. \quad (31)$$

6. Nel limite $p \rightarrow 0$ la sezione d'urto Eq. (23) diverge. Lo stesso accade quando $p \gg M$, e $\theta \rightarrow 0$: la sezione d'urto Eq. (31) diverge. In entrambi i casi la divergenza è dovuta al fatto che il fotone scambiato va on shell in quanto l'invariante di Mandelstam t si annulla. Ricordando l'espressione di t Eq. (15) si vede che t si annulla quando $p = 0$ oppure quando $\cos\theta = 1$. I due casi corrispondono rispettivamente ai due limiti considerati. La prima singolarità è detta infrarossa, e la seconda collineare.