Appunti riguardanti il Gruppo di Poincarè

Claudio Muselli

26 marzo 2015

Il nostro scopo e quello di costruire una teoria quantistica che soddisfi i principi della Relatività Speciale. Nel prosieguo mostreremo come, nel risolvere questo problema, sarà necessario utilizzare molti elementi della Teoria dei Gruppi.

1 Introduzione

Nella Relatività Speciale, la nostra descrizione della natura deve essere invariante sotto cambio di sistema di riferimento. In particolare è necessario richiedere invarianza delle leggi fisiche rispetto a ogni Trasformazione di Poincarè. Una generica trasformazione di Poincarè è costituita da una transformazione di Lorentz più un'eventuale traslazione spazio-temporale. In formule, è un cambio di variabile del tipo

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{1}$$

con $\{x', x, a\} \in \mathcal{V}^4$ vettori spazio-temporali. La matrice Λ rappresenta la matrice di trasformazione di Lorentz . Siccome non è utile nel nostro discorso, non scriveremo la forma generale della matrice $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ ma supporremo che la sua forma sia nota da un corso precedente.

Chiameremo $\mathcal{O}(1,3)$ l'insieme formato da tutte le matrici Λ. Questo insieme possiede le seguenti proprietà:

$$I \in \mathcal{O}(1,3), \tag{2a}$$

$$\Lambda_1\Lambda_2 \in \mathcal{O}(1,3), \forall \Lambda_i \in \mathcal{O}(1,3), \tag{2b}$$

$$\Lambda^{-1} \in \mathcal{O}(1,3), \forall \Lambda \in \mathcal{O}(1,3). \tag{2c}$$

Date queste proprietà, l'insieme $\mathcal{O}(1,3)$ è quindi un Gruppo di Matrici. In particolare, è possibile dimostrare che, in particolare, è un *Gruppo di Lie di Matrici*.

Il nostro intento è sempre quello di costruire una teoria relativistica. Ogni oggetto che vorremmo usare per costituire la nostra teoria dovrà trasformarsi sotto l'azione del Gruppo $\mathcal{O}(1,3)$. Ci limiteremo per semplicità al caso in cui questi oggetti generici appartengano a uno spazio vettoriale V.

Qualunque teoria dei campi è infatti uno di questi casi, in quanto i nostri campi appartengono allo spazio vettoriale formato da tutte le funzioni dello spazio-tempo. Ora sotto un generico cambio di variabili il nostro elemento $v \in V$ verrà mappato in un altro vettore $v' \in V$. E' valida perciò la seguente

Osservazione 1.
Un generico cambio di sistema di riferimento parametrizzato da una matrice $\Lambda \in \mathcal{O}(1,3)$ definisce un'applicazione invertibile $U(\Lambda): V \to V$ che descrive la trasformazione degli elementi di V. Date le proprietà Eqs. (2) *del nostro cambio di variabile la nostra applicazione $U(\Lambda)$ dovrà soddisfare*

$$U(I) = I, \tag{3a}$$

$$U(\Lambda_1) U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1 \Lambda_2), \tag{3b}$$

$$U\left(\Lambda^{-1}\right) = U(\Lambda)^{-1}. \tag{3c}$$

e dovrà quindi essere una rappresentazione *del Gruppo $\mathcal{O}(1,3)$.*

Questo significa che non siamo liberi di scegliere un qualunque oggetto per costruire la nostra teoria relativistica ma siamo obbligati a scegliere elementi che si trasformino sotto l'azione del gruppo di Poincarè secondo una delle sue rappresentazioni.

Per esempio, se abbiamo intenzione di costruire una teoria di campo che descriva l'interazione tra le particelle, assegneremo ad ogni particella fondamentale un campo che trasformi secondo una particolare rappresentazione del Gruppo di Poincarè.

In più, in una teoria di campo quantistica, dobbiamo anche richiedere l'unitarietà della rappresentazione, poiché dobbiamo soddisfare il requisito base della dimanica quantistica: il principio di conservazione della probabilità.

Dovendo associare una particolare rappresentazione ad ogni particella fondamentale della nostra teoria, abbiamo la necessità di studiare tutte le possibili *rappresentazioni irriducibili unitarie del Gruppo di Poincare.*

2 Gruppo di Lorentz e di Poincarè

Il Gruppo di Poincare è il prodotto semidiretto tra il gruppo di Lorentz e il gruppo delle traslazioni spazio-temporali:

$$\mathcal{P} = \mathcal{T}_4 \otimes \mathcal{O}(1,3). \tag{4}$$

Possiamo indicare un generico elemento di questo gruppo con la coppia (a, Λ) dove $\Lambda \in \mathcal{O}(1,3)$ e a è un qualunque vettore spazio-temporale. Le proprietà descritte nelle Eqs. (2) applicate a questo gruppo diventano

$$(a, \Lambda)\left(a', \Lambda'\right) = \left(a' + \Lambda' a, \Lambda' \Lambda\right), \tag{5a}$$

$$(0, I) = \text{ identità del gruppo di Poincarè}, \tag{5b}$$

$$\left(-a, \Lambda^{-1}\right) = (a, \Lambda)^{-1}. \tag{5c}$$

Le rappresentazioni di questo gruppo saranno applicazioni $U(a, \Lambda)$, agenti su un generico spazio vettoriale V. La dimensione di $U(a, \Lambda)$ è definita uguale alla dimensione dello spazio vettoriale su cui agisce. La rappresentazione non triviale con la dimensione minore è spesso chiamata *rappresentazione fondamentale* del gruppo.

Quando il gruppo è un gruppo di matrici c'è un'altra importante rappresentazione che è bene menzionare. Infatti possiamo definire un'azione degli elementi stessi del gruppo sopra il generico spazio vettoriale. Nel caso dei gruppi di Lorentz o di Poincare definiamo la seguente azione sui vettori spazio-temporali di $\mathcal{V}^4$:

$$U(a, \Lambda) \equiv (a^\mu, \Lambda^\mu{}_\nu) : \mathcal{V}^4 \to \mathcal{V}^4 \tag{6}$$

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{7}$$

Questa azione costruisce una particolare rappresentazione che è usualmente denominata la rappresentazione *regolare sinistra*.

In generale, per ogni rappresentazione del Gruppo di Poincarè deve valere che:

$$U(a, \Lambda) U(a', \Lambda') = U(a' + \Lambda' a, \Lambda' \Lambda) \tag{8a}$$

$$U(0, I) = I \tag{8b}$$

$$U(-a, \Lambda^{-1}) = [U(a, \Lambda)]^{-1}. \tag{8c}$$

Vogliamo ora avere un metodo per classificare tutte le possibili rappresentazioni del Gruppo di Poincarè. Tuttavia studiare l'insieme completo delle possibili rappresentazioni di un gruppo infinito dimensionale come il gruppo di Poincarè non è assolutamente un compito matematicamente semplice. Ci viene in aiuto però il concetto di *algebra di Lie*. Abbiamo la seguente definizione

Definizione 1. L'Algebra di Lie $\mathfrak{g}$ associata a un Gruppo di Lie di matrici G è uno *spazio vettoriale* che contiene tutte le matrici X per cui è valido che

$$U(t) = e^{tX} \tag{9}$$

con U rappresentazione infinitesima di G, connessa con l'identità.

La semplice relazione dell'Eq. (9) tra gli elementi del Gruppo e quelli dell'Algebra è valida solo per la regione del gruppo *semplicemente connessa* con la trasformazione identica. In generale la relazione è molto complicata.[1].

Quindi, data la definizione 1, è possibile classificare tutte le possibili trasformazioni infinitesime di G studiando la struttura dell'Algebra associata a G. Siccome quest'ultima risulta essere uno spazio vettoriale possiamo

[1]Il lettore interessato può trovare le condizioni generali di validità per esempio nel libro: Hall-Lie Group and Lie algebra

limitare il nostro studio a una sua base. Gli elementi di una base dell'Algebra di Lie vengono denominati i *generatori* dell'algebra.

Nel caso del Gruppo di Poincarè, possiamo esprimere la generica rappresentazione infinitesima, connessa con l'identità come

$$U\left(a,\Lambda\right)=e^{i\alpha_\mu P^\mu+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}. \tag{10}$$

con P e M generatori rispettivamente delle traslazioni e delle trasformazioni di Lorentz[2]. Il fattore i è stato messo per convenzione. E' importante far notare come il nostro scopo ultimo sia quello di **classificare** non di **trovare** le varie rappresentazioni. In tal senso, ci sono alcune libertà in questa procedura che è bene sottolineare:

- Prima di tutto non vi è alcun limite sulla natura dello spazio vettoriale V associato alla nostra rappresentazione. Questo spazio può essere formato da funzioni (i campi nel nostro caso), ma anche da vettori, tensori, arance, ecc...
- I generatori P e M, essendo una base qualunque di uno spazio vettoriale non sono univocamente definiti, ma a meno di un cambio di base. Data però la struttura di algebra di questo spazio, qualunque set di generatori scegliamo dovrà soddisfare particolari relazioni chiamate *regole di commutazione*. I valori dei commutatori tra i generatori definiscono completamente la natura dell'algebra di Lie.
- Scelti P e M attraverso il map esponenziale possiamo selezionare una particolare rappresentazione infinitesima $U\left(a,\Lambda\right)$. Variando i parametri α_μ e $\omega_{\mu\nu}$ vengono cambiati i valori di a e Λ.
- Non tutto il Gruppo di Lorentz risulta connesso con l'identità. Il comportamento delle varie rappresentazioni nelle regioni non connesse va studiato caso per caso (Analisi della Parità e del Time-Reversal).

In aggiunta a tutto questo, nello scrivere l'Eq. (10), abbiamo tacitamente fatto alcune assunzioni:

1. Il generatore P è un quadri-vettore cioè trasforma sotto l'azione del Gruppo di Lorentz come
$$U\left(0,\Lambda\right)^{-1}P^\mu U\left(0,\Lambda\right)=\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \tag{11}$$
2. Il generatore M è un tensore dello spazio-tempo, cioè si trasforma secondo la legge
$$U\left(0,\Lambda\right)^{-1}M^{\mu\nu}U\left(0,\Lambda\right)=\Lambda^\mu{}_\varrho\Lambda^\nu{}_\sigma M^{\varrho\sigma} \tag{12}$$

[2]Durante la lezione abbiamo utilizzato ε per indicare il parametro associato al gruppo di Lorentz. Si è preferito in queste note l'utilizzo di ω per uniformare la notazione con quella seguita nel corso

3. E' possibile trovare un particolare generatore M che ci permetta di scrivere la rappresentazione regolare sinistra infinitesima come

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{13}$$

con lo stesso ω.

Andremo a dimostrare tutte queste affermazioni tra un attimo.

Il nostro punto di partenza è la definizione della rappresentazione infinitesima regolare sinistra, Eq. (13). Poichè la matrice $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ deve appartenere al gruppo di Lorentz deve soffisfare la seguente relazione

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\varrho}{}_{\sigma}g^{\nu\sigma} = g^{\mu\varrho} \tag{14}$$

Inserendo Eq. (13) nell'Eq. (14), otteniamo

$$\left(g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\right) g^{\nu\varrho} = g^{\mu\varrho} + \left(\omega^{\mu\varrho} + \omega^{\varrho\mu}\right) \to \omega^{\mu\varrho} = -\omega^{\varrho\mu} \tag{15}$$

Poiché ω è un tensore antisimmetrico anche il tensore M deve essere antisimmetrico. Ora noi vogliamo trovare una particolare scelta di M che generi la rappresentazione infinitesima regolare appena trovata. Abbiamo che

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{16}$$

ma, espandendo al primo ordine l'esponenziale dell'Eq. (10), la stessa $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ dovrà essere restituita anche da

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\varrho\sigma}\left(M^{\varrho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu}\,. \tag{17}$$

Questo porta alla seguente equazione

$$\frac{i}{2}\omega_{\varrho\sigma}\left(M^{\varrho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{18}$$

che ci conduce alla soluzione

$$\left(M^{\varrho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} = i\left(g^{\mu\sigma}g^{\varrho}{}_{\nu} - g^{\mu\varrho}g^{\sigma}{}_{\nu}\right). \tag{19}$$

Perciò, come assunto in 3, una particolare scelta dei generatori $M^{\varrho\sigma}$ che restituisca la rappresentazione regolare sinistra esiste (vedi Eq. (19)).

2.1 Regole di Commutazione dell'algebra di Poincarè

Per trovare le regole di commutazione, soddisfatte dai generatori dell'Algebra di Poincarè partiamo da questa relazione [3]

$$U\left(0,\Lambda^{-1}\right)U\left(a',\Lambda'\right)U\left(0,\Lambda\right) = U\left(\Lambda^{-1}a',\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda\right). \tag{20}$$

[3] See Eq. (8)

Usando questa equazione, oltre alle regole di commutazione, potremmo anche verificare le altre assunzioni 1 e 2.

Iniziamo fissando $a' = \alpha$ infinitesimo e $\Lambda' = 1$ identità del gruppo di Lorentz. Per questa particolare scelta l'Eq (20) può essere riscritta come

$$U\left(0, \Lambda^{-1}\right)\left(1 + i\alpha_\mu P^\mu\right) U\left(0, \Lambda\right) = U\left(\alpha^\mu \Lambda_\mu^{\ \nu}, 1\right), \tag{21}$$

per poi ottenere

$$U\left(0, \Lambda^{-1}\right) P^\mu U\left(0, \Lambda\right) = \Lambda^\mu_{\ \nu} P^\nu, \tag{22}$$

provando l'assunzione 1. Considerando anche la trasformazione stessa $U(0, \Lambda)$ come una trasformazione infinitesima possiamo sostituire l'espansione dell'Eq. (10) nel equazione precedente per scrivere

$$\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}\right) P^\mu \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}\right) = \left(g^\mu_{\ \nu} + \omega^\mu_{\ \nu}\right) P^\nu, \tag{23}$$

e ottenere, dopo alcuni passaggi algebrici

$$\left[P^\mu, M^{\alpha\beta}\right] = -2ig^{\mu\alpha} P^\beta = i\left(g^{\mu\beta} P^\alpha - g^{\mu\alpha} P^\beta\right) \tag{24}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'antisimmetria del tensore $M^{\alpha\beta}$.

Ora ripartendo dall'Eq. (20) e fissando questa volta $a' = 0$ e $\Lambda' = \omega$ infinitesimo, possiamo trovare analoghe regole di commutazione per i generatori M. Scriviamo perciò

$$U\left(0, \Lambda^{-1}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\varrho\sigma} M^{\varrho\sigma}\right) U\left(0, \Lambda\right) = U\left(0, \Lambda^{-1}\omega\Lambda\right) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\varrho\sigma} \Lambda^\varrho_{\ \mu} \Lambda^\sigma_{\ \nu} M^{\mu\nu} \tag{25}$$

e otteniamo in modo diretto

$$U\left(0, \Lambda^{-1}\right) M^{\varrho\sigma} U\left(0, \Lambda\right) = \Lambda^\varrho_{\ \mu} \Lambda^\sigma_{\ \nu} M^{\mu\nu} \tag{26}$$

provando l'assunzione 2. Ora, come prima, possiamo trovare le regole di commutazione considerando anche le altre trasformazioni come infinitesime e eseguendo i calcoli necessari. In questo modo, possiamo trovare

$$\left[M^{\varrho\sigma}, M^{\alpha\beta}\right] = i\left(M^{\varrho\alpha} g^{\sigma\beta} - M^{\sigma\alpha} g^{\varrho\beta} + M^{\sigma\beta} g^{\alpha\varrho} - M^{\varrho\beta} g^{\alpha\sigma}\right). \tag{27}$$

In conclusione, l'algebra di Lie associata al gruppo di Poincarè è completamente definita dalle seguenti regole di commutazione:

$$\left[P^\mu, P^\nu\right] = 0, \tag{28a}$$

$$\left[P^\mu, M^{\alpha\beta}\right] = i\left(g^{\mu\beta} P^\alpha - g^{\mu\alpha} P^\beta\right), \tag{28b}$$

$$\left[M^{\varrho\sigma}, M^{\alpha\beta}\right] = i\left(M^{\varrho\alpha} g^{\sigma\beta} - M^{\sigma\alpha} g^{\varrho\beta} + M^{\sigma\beta} g^{\alpha\varrho} - M^{\varrho\beta} g^{\alpha\sigma}\right). \tag{28c}$$

Esercizio 1. *Provare che la soluzione per gli M della rappresentazione regolare sinistra, Eq.* (19)*, soddisfa le relazione di commutazioni dell'Algebra di Poincare* (28)*.*

L'ultimo punto che siamo interessati a sottolinare riguarda i generatori delle trasformazioni di Lorentz $M^{\varrho\sigma}$. Noi sappiamo che il Gruppo di Lorentz possiede, come sottogruppo, il gruppo delle rotazioni. Deve quindi essere possibile dividere l'intero insieme dei generatori di Lorentz in due gruppi, uno responsabile delle rotazioni, e uno responsabile dei boosts. Infatti, possiamo definire implicitamente i generatori delle rotazioni come

$$M^{ij} = \varepsilon^{ijk} L_k \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{29}$$

dove abbiamo indicato con ε il tensore di Levi-Civita, e i generatori dei boosts come

$$M^{0i} = K^i. \tag{30}$$

Con questa nuova base di dieci generatori, abbiamo un insieme di regole di commutazione che ci permetterà di classificare tutte le rappresentazioni infinitesime connesse con l'identità del gruppo di Poincaré:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{31a}$$
$$[L_i, P_0] = 0, \tag{31b}$$
$$[L_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk} P^k, \tag{31c}$$
$$[K_i, P_0] = iP_i, \tag{31d}$$
$$[K_i, P_j] = -iP_0 \delta^i_j, \tag{31e}$$
$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L^k, \tag{31f}$$
$$[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} L^k, \tag{31g}$$
$$[L_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K^k. \tag{31h}$$

Nella prossima sottosezione andremo a parametrizzare tutte le possibili rappresentazioni irriducibili, che agiscono sui campi di una teoria ipotetica.

2.2 Rappresentazioni irriducibili di campo

Per classificare tutte le possibili rappresentazioni irriducibili agenti sullo spazio vettoriale formato da tutte le funzioni dello spazio-tempo $\mathcal{V}^4$, vogliamo usare i risultati derivanti dalla teoria dello spin, che supporremo essere nota, almeno nelle sue linee generali.

Il risultato della teoria dello spin che vorremmo usare è il seguente: data un'algebra di Lie basata sulla regola di commutazione

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L^k \tag{32}$$

essa genera rappresentazioni infinitesime etichettate da un numero s assumente valori interi o semi-interi. La teoria dello spin ci restituisce anche la forma dei generatori L_k almeno per i primi valori del parametro s. Per esempio

$$s = 0 \qquad\qquad L_k \propto I, \tag{33a}$$

$$s = \frac{1}{2} \qquad\qquad L_k \propto \sigma_k, \tag{33b}$$

$$\dots \tag{33c}$$

con σ_k le matrici di Pauli. Ora il nostro desiderio e quello di ridurre le regole di commutazione piu complicate del gruppo di Poincarè, Eqs. (31), a una forma generalizzata dell'algebra dello spin.

Per prima cosa separiamo le traslazioni dal gruppo di Lorentz. Ogni rappresentazione infinitesima del solo gruppo delle traslazioni è etichettata dal valore reale del momento p. In generale le rappresentazioni di Lorentz saranno rappresentazioni del gruppo di Poincarè totale a patto di aggiungere questo altro numero reale nel classificarle.

Passiamo quindi all'analisi del gruppo di Lorentz. Per ridurlo a una generalizzazione dell'algebra dello spin, definiamo questa opportuna combinazione dei generatori L e K, definiti precedentemente:

$$A_k = \frac{1}{2}\left(L_k + iK_k\right), \tag{34}$$

$$B_k = \frac{1}{2}\left(L_k - iK_k\right). \tag{35}$$

In termini di questi nuovi generatori, le regole di commutazione dell'algebra del solo gruppo di Lorentz possono essere riscritte come

$$[A_i, B_j] = 0, \tag{36a}$$

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A^k, \tag{36b}$$

$$[B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B^k. \tag{36c}$$

Prestando attenzione alle relazioni appena scritte, possiamo notare come abbiamo raggiunto il nostro scopo. Abbiamo infatti semplificato l'algebra di Lorentz in una doppia algebra dello spin, in termini di questi nuovi generatori A e B.

In conclusione, perciò, la generica rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincare sarà descritta da due numeri di spin j e j', assumenti valori interi o semi-interi, più un numero reale p. Ad ogni scelta di questi parametri possiamo associare un particolare campo che si trasformerà sotto l'azione di una trasformazione infinitesima di Poincarè secondo l'Eq. (10). Come ultimo risultato possiamo classificare in una breve lista, i valori di p, j e j' a cui corrispondono le principali rappresentazioni di campo utilizzate nelle varie teorie:

$$\left|p,0,0\right\rangle \rightarrow \varphi_p\left(x\right) \qquad \text{Campo Scalare,} \tag{37a}$$

$$\left|p,\frac{1}{2},0\right\rangle \rightarrow \psi_p^R\left(x\right) \qquad \text{Spinore di Weyl right,} \tag{37b}$$

$$\left|p,0,\frac{1}{2}\right\rangle \rightarrow \psi_p^L\left(x\right) \qquad \text{Spinore di Weyl left,} \tag{37c}$$

$$\left|p,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \rightarrow A_p^\mu\left(x\right) \qquad \text{Campo Vettoriale,} \tag{37d}$$

$$\ldots \tag{37e}$$

A questo punto la giusta domanda è: queste rappresentazioni appena trovate sono unitarie? La risposta è purtroppo negativa.

Quindi, i campi così definiti non possiedono tutte le proprietà che richiedevamo per descrivere le nostre particelle; può però essere dimostrato[4] che, imponendo le giuste equazioni di campo, è possibile stabilire un'applicazione biettiva tra alcune di queste rappresentazioni appena trovate, e le rappresentazioni unitarie descriventi le varie particelle. In questo modo sarà lecito utilizzare la descrizione di campo per studiare le interazioni fondamentali della natura.

[4]Ad esempio in Weinberg Vol I.