Problemi per il corso di
teoria delle interazioni fondamentali
maggio 2006

Primo Modulo

1. **Scattering Møller.**

   Considare l'urto elastico elettrone-elettrone in QED, ossia il processo $e^-e^- \to e^-e^-$ (scattering Møller), nel limite in cui si può trascurare la massa degli elettroni. Scrivere gli accoppiamenti del fotone ai fermioni in termini di componenti left–handed (L) e right–handed (R).

   (a) Determinare le sezioni d'urto polarizzate σ_{LL}, σ_{LR}, σ_{RL}, σ_{RR}.

   (b) Verificare che la sezione d'urto totale non polarizzata coincide con la somma delle quattro sezioni d'urto polarizzate. Discutere se vi sia una regione di energia in cui il risultato ottenuto fornisce una descrizione sufficientemente accurata per il processo fisico.

2. **Elettrodinamica scalare**

   Considerare la teoria di un campo scalare complesso ϕ accoppiato ad un potenziale elettromagnetico A^μ, con lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

   dove la derivata covariante è $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

   (a) Determinare le regole di Feynman per questa teoria.

   (b) Considerare la teoria ottenuta combinando l'elettrodinamica ordinaria con quella scalare, cioè contenente un campo scalare complesso, un campo di elettrone ed il campo elettromagnetico, e calcolare in questa teoria la sezione d'urto per il processo

$$e^+e^- \to \phi\phi^*.$$

(c) Discutere il risultato della precedente domanda confrontandolo con quello ottenuto a lezione per la sezione d'urto per il processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

3. **Collider gamma gamma**

(a) Determinare la sezione d'urto differenziale per i processi:

$$\begin{aligned} \gamma\gamma &\to e^+e^- \\ \gamma\gamma &\to \phi\phi^* \end{aligned}$$

rispettivamente in QED ed elettrodinamica scalare, senza trascurare le masse dell'elettrone e del campo scalare. Confrontare i risultati ottenuti nei due casi.

(b) Utilizzare le ampiezze calcolate al punto precedente per determinare le sezioni d'urto per i processi inversi:

$$\begin{aligned} e^+e^- &\to \gamma\gamma \\ \phi\phi^* &\to \gamma\gamma \end{aligned}$$

e discutere anche in questo caso i risultati.

4. **Funzione β e self–energia del fotone in QED**

Considerare la prima correzione di ordine superiore al propagatore di un fotone di impulso q^μ in QED, supponendo che il propagatore all'ordine zero sia semplicemente dato da $\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$, cioè trascurando complicazioni legate alla somma sulle polarizzazioni.

(a) Dimostrare che il risultato può essere scritto nella forma

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{1}{1-\Pi(q^2)}\right),$$

e determinare la funzione $\Pi(q^2)$ (self-energia del fotone) all'ordine e^2 in $4-2\epsilon$ dimensioni.

(b) Interpretare il prodotto di e^2 moltiplicato per il residuo del polo del propagatore a $q^2=0$ come carica elettrica efficace, e usare il risultato del punto precedente per determinare la funzione β della QED.

5. **Decadimento del top**

Considerare il decadimento del quark *top* in un bosone W e un quark *bottom*:

$$t \to W + b$$

(a) Calcolare la larghezza totale di decadimento, nell'approssimazione in cui la massa del quark b è trascurabile.

(b) Calcolare le larghezze di decadimento parziali corrispondenti ai diversi stati di polarizzazione del bosone W.

Secondo Modulo

6. **Il parametro ρ**

(a) Determinare il rapporto delle ampiezze ad albero per i proceessi di scattering elastico di corrente carica e neutra $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ e $\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$, nel limite di bassa energia in cui esse possono essere calcolate da una lagrangiana efficace di tipo Fermi della forma

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = G_{\text{eff}} J^\mu J_\mu,$$

dove G_{eff} è una costante di accoppiamento che dipende dalle costanti elettrodeboli e dalle masse dei bosoni di gauge, e J^μ sono correnti cariche o neutre. Mostrare che il rapporto di queste ampiezze determina il parametro ρ definito come

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2\theta_W}$$

e che in approssimazione ad albero $\rho = 1$.

(b) Considerare le correzioni ad un loop al parametro ρ, definito dal rapporto di ampiezze discusso sopra. Disegnare i diagrammi di Feynman corrispondenti alle correzioni ad un loop a questo rapporto di ampiezze nel modello standard (self-energia, vertice e box), e arguire che la correzione più importante è data dai contributi di self-energia dovuti al doppietto di quark top-bottom.

(c) Calcolare la correzione dominante al parametro ρ nel limite di bassa energia ($q^2 = 0$), al più basso ordine non banale in teoria delle perturbazioni. Mostrare che la correzione al parametro ρ è finita nell'ultravioletto, sebbene i singoli contributi siano divergenti, ed è pari a $\Delta\rho \equiv \rho - 1 = 3\frac{G_\mu m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2}$

7. **Ricerca di un bosone di Higgs leggero**

Calcolo del segnale Considerare la produzione a LHC ($\sqrt{S} = 14$TeV) di un bosone di Higgs leggero ($m_H = 130$GeV) tramite il meccanismo di fusione di gluoni.

(a) Calcolare la sezione d'urto adronica

$$\sigma(pp \to H) \;=\; \int_0^1 dx_1 dx_2 g(x_1) g(x_2) \hat{\sigma}(gg \to H)$$

utilizzando come parametrizzazione per le densità gluoniche nel protone la forma $g(x) = 8x^{-1}(1-x)^7$ e per la sezione d'urto partonica l'espressione ricavata a lezione, valutata con $m_t = 175$GeV.

(b) Calcolare la larghezza di decadimento del bosone di Higgs in due fotoni (per semplicità si consideri, nel decadimento $H \to \gamma\gamma$ solo il diagramma con un triangolo di top)

(c) Calcolare il *branching ratio*

$$BR(H \to \gamma\gamma) \equiv \frac{\Gamma(H \to \gamma\gamma)}{\Gamma_{tot}},$$

dove Γ sono le larghezze di decadimento parziale e totale, e per il calcolo di quest ultima si considerino tutti i canali di decadimento cinematicamente possibili per un bosone con una massa $m_H = 130$GeV.

(d) Calcolare la sezione d'urto $\sigma(pp \to H \to \gamma\gamma)$ che può essere ottenuta, nel limite di Higgs reale, moltiplicando la sezione d'urto di produzione del bosone di Higgs per il branching ratio del canale di decadimento considerato.

(e) Calcolare il numero di eventi attesi con una luminosità di 100 fb^{-1}.

Calcolo del fondo Esistono molti processi che danno luogo alla stessa segnatura (sue fotoni nello stato finale) in collisioni protone-protone. Considerare per esempio il processo partonico $u\bar{u} \to \gamma\gamma$.

(a) Calcolare la distribuzione in massa invariante del sistema dei due fotoni dello stato finale.

(b) Calcolare il numero di eventi attesi, con una luminosità di 100 fb^{-1} per il processo di background $pp \to \gamma\gamma$ mediato da questo sottoprocesso partonico, per una massa invariante dei due fotoni pari a $m_{\gamma\gamma} = 130\mathrm{GeV}$. Utilizzare come parametrizzazione per la densità di quarks up nel protone la forma $u(x) = x^{-1/2}(1-x)^4$. Supporre per semplicità che la densità di antiquark abbia la stessa forma e discutere brevemente l'attendibilità di questa ipotesi.

8. **Produzione di coppie di bosoni vettori**

   (a) Considerare il processo $u\bar{d} \to W^+ g$ (g è un gluone) nel centro di massa partonico. Verificare la trasversalità dell'ampiezza rispetto all'impulso del gluone. Nel caso di produzione di un W longitudinale, discutere il meccanismo di cancellazione dei termini che violano l'unitarietà nel limite di alta energia.

   (b) Considerare ora il processo $u\bar{d} \to W^+\gamma$. Verificare l'identità di Ward legata a trasformazioni di $U(1)_{em}$ e discutere la differenza rispetto al caso precedente.

   (c) Calcolare la distribuzione in impulso trasverso del bosone W^+ per i due processi in esame.

9. **Produzione di fotone diretto in urti adronici**

   Considerare il processo di produzione di un fotone+X in un urto protone–protone o protone–antiprotone, nel regime in cui l'impulso trasverso del fotone sia grande (diversi GeV) ed il processo possa quindi essere trattato perturbativamente.

   (a) Disegnare tutti i diagrammi di Feynman che contribuiscono al corrispondente sottoprocesso partonico al più basso ordine in teoria delle perturbazioni.

   (b) Calcolare le ampiezze quadrate corrispondenti ai due sottoprocessi partonici che compaiono all'ordine più basso (ponendo a zero tutte le masse dei quark), espresse in termini degli invarianti di Mandelstam del processo $2 \to 2$

(c) Parametrizzare l'impulso del fotone in termini di rapidità η ed impulso trasverso $\vec{p}_\perp$ come $p_\gamma = (p_\perp \cosh \eta_\gamma, \vec{p}_\perp, p_\perp \sinh \eta_\gamma)$. Esprimere la sezione d'urto differenziale in $p_\perp$, integrata in rapidità $p_\perp^3 \frac{d\sigma}{dp_\perp}$ per il processo adronico corrispondente, supponendo che valga la fattorizzazione, come convoluzione di distribuzioni partoniche $q_i(x, \mu^2)$, $\bar{q}_i(x, \mu^2)$ con coefficienti $C_{ij}(z, \frac{p_\perp^2}{\mu^2}, \alpha(\mu^2))$, dove i, j sono i vari tipi di partoni entranti Determinare i due coefficienti corrispondenti ai due sottoprocessi partonici, con $z = \frac{4p_\perp^2}{s}$, in termini di sezioni d'urto partoniche, usando le ampiezze determinate al punto precedente.

(d) Discutere la relazione tra cinematica partonica ed adronica, sia in generale che al più basso ordine perturbativo, e discutere quali sottoprocessi diano il contributo dominante in varie regioni cinematiche.

10. **Equazioni di Altarelli-Parisi a piccoli x**

Considerare le equazioni di Altarelli-Parisi per il quark singoletto ed il gluone, definiti come

$$Q(x,t) \equiv x \sum_{i=1}^{n_f} (q_i(x,t) + \bar{q}_i(x,t)\, ; \qquad G(x,t) \equiv x g(x,t),$$

in termini delle distribuzioni partoniche del problema precedente, q_i, $\bar{q}_i$, g, con $t \equiv \ln(Q^2/\mu^2)$, e le espressioni leading-order delle splitting functions

(a) Scrivere le equazioni di evoluzione per i momenti delle distribuzioni partoniche

$$\begin{aligned} \bar{Q}(N,t) &\equiv \int_0^1 dx\, x^{N-1} Q(x,t), \\ \bar{G}(N,t) &\equiv \int_0^1 dx\, x^{N-1} G(x,t) \end{aligned}$$

e determinare le corrispondenti dimensioni anomale $\gamma(N, \alpha(Q^2))$

(b) Arguire che la regione di piccolo x corrisponde alla regione di piccolo N. Determinare le equazioni di evoluzione in questa regione sviluppando le dimensioni anomale in serie di potenze attorno alla loro singolarità in $N = 1$. Tenere il termine singolare ed il termine costante dello sviluppo, e determinare le splitting functions corrispondenti a queste dimensioni anomale sviluppate per inversione della trasformata di Mellin che lega le splitting functions alle dimensioni anomale.

(c) Mostrare che in questa approssimazione, le equazioni di Altarelli-Parisi si riducono ad equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti, rispetto alle due variabili $\zeta \equiv \ln t$ e $\xi \equiv \ln \frac{1}{x}$.

(d) Risolvere l'equazione di evoluzione per il gluone nell'approssimazione in cui nello sviluppo del punto (b) si tengano solo i contributi singolari alle dimensioni anomale, e si trascuri l'accoppiamento tra quark e gluone (notare che passando alle variabili $\xi+\zeta$ e $\xi-\zeta$ essa si riduce ad un'equazione di Schrödinger di particella libera con $E < 0$). Risolvere quindi l'equazione di evoluzione per il quark sostituendo in essa la soluzione trovata per il gluone.

(e) Determinare l'andamento a piccolo x e grande Q^2 della funzione di struttura $F_2(x, Q^2)$ supponendo che essa sia dominata dal contributo di $Q(x, Q^2)$. Supporre che a $Q^2 = Q_0^2 \approx 1$ GeV^2 sia $Q(x, Q_0^2) = Cx^{-\alpha}$, con C una costante di normalizzazione opportuna e $\alpha < 1$. Determinare l'andamento a piccolo x, $Q^2 >> Q_0^2$ usando la soluzione determinata nel punto precedente, e discutere questo andamento nel piano (x, Q^2) (ovvero (ξ, ζ)) a seconda del valore di α.