Problemi per il corso di teoria delle interazioni fondamentali

giugno 2008

Primo Modulo

1. **Produzione di dimuoni in fusione fotone-fotone.**

   Si consideri il processo di QED $e^+e^- \to e^+e^-\mu^+\mu^-$. Questo processo è dominato dal diagramma in cui l'elettrone ed il positrone emettono ciascuno un fotone, e questi ultimi producono una coppia $\mu^+\mu^-$.

   (a) Si scriva la sezione d'urto per il processo in termini dell'ampiezza $M^{\mu\nu}(\gamma^*\gamma^* \to \mu^+\mu^-)$, senza eseguire l'integrazione di spazio delle fasi.

   (b) Si calcoli la sezione d'urto differenziale σ_{TT} per il processo $\gamma^*\gamma^* \to \mu^+\mu^-$, supponendo che i fotoni virtuali siano polarizzati trasversalmente (cioè eseguendo la somma sulle loro polarizzazioni come nel caso di fotoni reali). Si trascurino le masse dei fermioni e si suppongano le virtualità dei fotoni eguali fra loro.

2. **Funzione beta per la massa nella teoria ϕ^4.**

   Si consideri un campo scalare reale con lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\lambda \\ &\quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \\ &\quad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}m^2\varphi^2 \\ &\quad \mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4, \end{aligned} \tag{1}$$

   e si interpretino $\mathcal{L}_0$ come lagrangiana e $\mathcal{L}_m$ ed $\mathcal{L}_\lambda$ come perturbazioni ad essa.

(a) Si scrivano le regole di Feynman per questa teoria: il propagatore determinato da $\mathcal{L}_0$ ed i vertici di interazione indotti da $\mathcal{L}_m$ ed $\mathcal{L}_\lambda$.

(b) Si determini la funzione β per il parametro m a partire dal calcolo dell'ampiezza di transizione $\langle\varphi|\varphi\rangle$: si dimostri che la funzione β è nulla ad un loop, e se ne calcoli il valore a due loop. Notare che a due loop un solo diagramma contribuisce alla funzione β.

3. **Scattering elastico elettrone-neutrino.**

Si calcoli la sezione d'urto elastica elettrone-neutrino $\nu e^- \to \nu e^-$.

(a) Si considerino i quattro casi in cui ν denota rispettivamente ν_μ, ν_e, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_e$: si scrivano i diagrammi di Feynman che contribuiscono in ciascun caso.

(b) Si determini la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{dy}$ nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è a riposo prima dell'urto, in termini delle variabili E_ν ed $y = E_e/E_\nu$, dove E_ν è l'energia del neutrino incidente e E_e l'energia dell'elettrone emesso, nel limite $m_e/E_e \to 0$, cioè trascurando la massa dell'elettrone rispetto alla sua energia.

(c) Si esprima il risultato del punto precedente in termini della costante di Fermi G_F e delle costanti g_L e g_R che danno l'accoppiamento con le parti left e right dell'elettrone sia per il caso di corrente carica che di corrente neutra: si dimostri che la sezione d'urto prende la stessa forma in tutti i quattro casi considerati, ma con diversi valori delle costanti g_L e g_R.

(d) Si determini la sezione d'urto totale e, usando il risultato del punto precedente, si confronti il valore di tale sezione d'urto nei quattro casi considerati.

4. **Decadimento del τ**

(a) Si calcoli il tasso di decadimento $\tau \to \pi\nu$, parametrizzando l'elemento di matrice della corrente adronica come

$$\langle\pi(q)|\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d|0\rangle = i\sqrt{2}q_\mu f_\pi,$$

dove $f_\pi \approx 90$ MeV.

(b) Si determini il rapporto (branching ratio) tra il tasso di decadimento calcolato al punto precedente ed il tasso di decadimento in leptoni, utilizzando per quest'ultimo l'espressione derivata a lezione per il decadimento del muone, opportunamente adattata al caso del τ. Si confronti il risultato con il valore sperimentale.

Secondo Modulo

5. **Determinazione della massa del** W

   Si calcoli la sezione d'urto ad albero per il processo di produzione di coppie W^+W^- in annichilazione e^+e^-.

   (a) Si dimostri che la sezione d'urto rispetta l'unitarietà, ma che essa è violata se si includono solo i diagrammi di Feynman corrispondenti ad una teoria di gauge abeliana..

   (b) Si discuta l'andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia.

   (c) Nella regione prossima alla soglia di produzione, si sviluppi la sezione d'urto in potenze della velocità β_W dei W, data da $\beta_W = \sqrt{1 - 4M_W^2/s}$. Si determini l'andamento in β_W di ciascuna delle sottoampiezze per il processo e si individui quella dominante. Si scrivano quindi la sezione d'urto differenziale e totale fino all'ordine β_W^2. Si usi il risultato per la sezione d'urto totale (disponibile ad es. in `hep-ex/0612034`) per determinare la massa del W, e si confronti il risultato con il valore dato dal PDG.

6. **Correzioni di QCD al processo di Drell-Yan**

   Si consideri il processo $pp \to \mu^+\mu^-$ all'ordine α_s.

   (a) Si scriva l'espressione fattorizzata per la sezione d'urto totale σ relativa a questo processo in termini delle sezioni d'urto $\hat{\sigma}$ per i sotto-processi partonici che contribuiscono ad esso, e si scrivano i diagrammi di Feynman che contribuiscono ai vari sotto-processi partonici all'ordine α_s^0 (modello a partoni) ed all'ordine α_s. Si parametrizzino σ in termini della massa invariante della coppia di muoni M^2 e di $\tau \equiv \frac{M^2}{s}$, dove s è l'invariante di Mandelstam relativo alla collisione protone-protone, e $\hat{\sigma}$ in termini di $\hat{\tau} \equiv \frac{M^2}{\hat{s}}$, dove $\hat{s}$ è l'invariante di Mandelstam relativo alla collisione partone-partone.

(b) Si scriva la sezione d'urto partonica nella forma

$$M^4 \frac{d\hat{\sigma}}{dM^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3N} \hat{\tau} F(\hat{\tau}),$$

dove N è un fattore di colore. Si dimostri quindi che all'ordine α_s^0 la funzione $F(\hat{\tau})$ è proporzionale a $\delta(1-\hat{\tau})$ e si determini il coefficiente di proporzionalità.

(c) Si scriva la funzione $F(\hat{\tau})$ relativa al sottoprocesso $q\bar{q} \to V^* \to \mu^+\mu^-$ (dove V^* denota un fotone o Z virtuale) nella forma

$$F(\hat{\tau}) = F_0(\hat{\tau}) + \alpha F_1(\hat{\tau}).$$

Si calcoli il contributo di emissione reale alla $F_1(\hat{\tau})$, in $d = 4-2\varepsilon$ dimensioni. Si parametrizzi la cinematica esprimendo gli invarianti di Mandelstam per il processo partonico in termini delle variabili Q^2 e $\hat{\tau}$ definite sopra e di $y = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$, dove θ è l'angolo di emissione del fotone virtuale (o del gluone) rispetto all'asse della collisione quark-antiquark.

(d) La correzione virtuale al primo ordine a $F(\hat{\tau}, M^2)$ è data da

$$\left[F_1^{(1)}(\hat{\tau})\right]_{\text{virt}} = -(-M^2)^{-\epsilon} (4\pi)^{\epsilon} \frac{C_{\text{F}}}{\pi} \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \times$$
$$\times \frac{1-\epsilon}{1-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{2}\epsilon^2\right) \delta(1-\hat{\tau}).$$

Si sommi questa correzione al contributo di emissione reale calcolato al punto precedente e si verifichi la cancellazione delle singolarità infrarosse, sfruttando l'identità

$$\frac{1}{(1-\hat{\tau})^{1+\epsilon}} = -\frac{1}{\epsilon}\delta(1-\hat{\tau}) + \left[\frac{1}{1-\hat{\tau}}\right]_+ - \epsilon \left[\frac{\ln(1-\hat{\tau})}{1-\hat{\tau}}\right]_+ + O(\epsilon^2).$$

(e) Si identifichi il coefficiente della singolarità collineare nel risultato finale per la correzione al primo ordine calcolato al punto precedente e si verifichi che esso è proporzionale alla *splitting function* P_{qq} di Altarelli-Parisi. Si determini il risultato finito per la funzione di struttura dopo aver fattorizzato la singolarità.

7. **Produzione associata di Higgs e W**

   Si consideri la sezione d'urto di produzione associata di Higgs e W o Z in collisione protone-protone o protone-antiprotone

   (a) Si scriva l'espressione fattorizzata per questo processo. Si discuta quali sottoprocessi partonici contribuiscono ad esso all'ordine α_s^0 ed all'ordine α_s e si disegnino i diagrammi di Feynman corrispondenti.

   (b) Si calcolino ad albero la sezione d'urto differenziale e quella totale per il sottoprocesso partonico $q\bar{q} \to HV$.

   (c) Si dimostri che la sezione d'urto totale calcolata al punto precedente si può scrivere nella forma

   $$\frac{d\sigma}{dk^2}(q\bar{q} \to HV) = \sigma(q\bar{q} \to V^*) \frac{d\sigma}{dk^2}(V^* \to HV),$$

   dove k^2 è la massa invariante della coppia HV, V indica W o Z e V^* indica un bosone virtuale di massa k^2. Si dimostri che questo resta vero al primo ordine in α_s.

   (d) Si usi il risultato del punto precedente per calcolare le correzioni all'ordine α_s a questo processo partonico.

   (e) Si stimi la sezione d'urto totale a livello adronico per questo processo utilizzando il risultato all'ordine $O(\alpha_s)$ e distinguendo tra collider protone-protone e protone-antiprotone.

8. **Risommazione in soglia per il processo di Drell-Yan**

   Si consideri la sezione d'urto $\sigma(\tau, M^2)$ per il processo di Drell-Yan ricavata al primo punto dell'esercizio 6, fattorizzata in termini di distribuzioni partoniche $f_i(x, \mu^2)$ e di una sezione d'urto partonica $\hat{\sigma}\left(\hat{\tau}, \frac{M^2}{\mu^2}\right)$.

   (a) Si prenda l'espressione all'ordine α_s^0 nel caso protone-antiprotone, e si arguisca che nella regione $\tau \to 1$ il contributo predominante viene da una sola distribuzione partonica. Si scriva l'espressione per la trasformata di Mellin della sezione d'urto

   $$\sigma(N, M^2) = \int_0^1 \tau^{N-1} \sigma(\tau, M^2)$$

in questa approssimazione. Si definisca

$$\gamma\left(\frac{M^2}{\mu^2}, N\right) = \frac{\partial \ln \sigma\left(N, (\frac{M^2}{\mu^2})\right)}{\partial \ln M^2},$$

e si dimostri che $\gamma(\frac{M^2}{\mu^2}, N)$ si può scrivere come la somma di un termine che dipende solo dalle dimensioni anomale di Altarelli-Parisi e di un termine che dipende solo dalla sezione d'urto partonica $\hat{\sigma}$.

(b) Si dimostra (cfr. H. Contopanagos et al., *Nucl. Phys.* **B484** (1997) 303) che nel limite di grande N, a meno di termini $O(1/N)$ la $\gamma(\frac{M^2}{\mu^2}, N)$ prende la forma

$$\gamma\left(\frac{M^2}{\mu^2}, N\right) = \gamma^{(c)}\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \gamma^{(l)}\left(\frac{M^2}{N^2\mu^2}\right),$$

dove $\gamma^{(c)}$ e $\gamma^{(l)}$ sono funzioni opportune, e dove $\gamma^{(l)}$ può essere scelto in modo da annullarsi quando $N = 1$; ossia $\gamma\left(\frac{M^2}{\mu^2}, 1\right) = \gamma^{(c)}\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)$.

L'invarianza sotto gruppo di rinormalizzazione di $\gamma\left(\frac{M^2}{\mu^2}, N\right)$ implica che

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}\gamma^{(c)}\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) = -\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}\gamma^{(l)}\left(\frac{M^2}{N^2\mu^2}\right) = g(\alpha_s(\mu^2)).$$

Si dimostri che ciò implica che

$$\gamma^{(l)}\left(\frac{M^2}{N^2\mu^2}\right) = \int_1^{N^2} \frac{dn}{n} g(\alpha(M^2/n)).$$

(c) Si determini la forma di $\gamma^{(l)}\left(\frac{M^2}{N^2\mu^2}\right)$ quando la funzione $g(\alpha_s(\mu^2))$ è del primo ordine, cioè $g(\alpha_s(\mu^2)) = g_1\alpha_s(\mu^2)$, e si mostri che in tal caso essa è una serie di *leading logs* in cui il ruolo del grande logaritmo è giocato da $\ln N^2$. Si mostri inoltre che contributi quadratici e di ordine superiore a $g(\alpha_s(\mu^2))$ corrispondono a logaritmi sottodominanti.

(d) Si dimostri che la conoscenza del coefficiente g_1 permette di determinare a qualunque ordine perturbativo α_s^n il coefficiente del contributo alla sezione d'urto partonica $\hat{\sigma}$ della forma $\alpha_s^n \frac{\ln^k(1-\hat{\tau})}{1-\hat{\tau}}$ avente il massimo valore di k, e, utilizzando il risultato del punto precedente, si determini qual è questo valore massimo di k.

(e) Usando il risultato del punto (b), si mostri che g_1 può essere calcolata dalla dimensione anomala di Altarelli-Parisi al primo ordine e se ne determini il valore trascurando il contributo dei gluoni, cioè utilizzando esclusivamente la dimensione anomala γ_{qq} (si dimostra che il contributo delle altre dimensioni anomale è sottodominante). Si usi questo valore di g_1 per prevedere il coefficiente del termine proporzionale a $\alpha_s^2 \frac{\ln(1-\hat{\tau})}{1-\hat{\tau}}$ nella sezione d'urto partonica di Drell-Yan $\hat{\sigma}(q\bar{q} \to \mu^+\mu^-)$ calcolata nel problema 6.