Problemi per il corso di
teoria delle interazioni fondamentali
febbraio 2014

Primo Modulo

1. **Produzione di coppie in QED con un campo di Higgs**
   Si consideri una teoria la cui lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_H, \tag{1}$$

   dove $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ è la lagrangiana dell'elettrodinamica con un elettrone ed un muone, mentre $\mathcal{L}_H$ è la lagrangiana per un campo scalare reale ϕ di massa m_H (che chiameremo campo di Higgs) accoppiato all'elettrone ed al muone, avente la seguente forma

$$\mathcal{L}_H = \tfrac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \tfrac{1}{2} m_H^2 \phi^2 + e \left(\frac{m_e}{\Lambda} \bar{\psi}_e \psi_e \phi + \frac{m_\mu}{\Lambda} \bar{\psi}_\mu \psi_\mu \phi \right), \tag{2}$$

   dove m_e ed m_μ sono rispettivamente la massa dell'elettrone e del muone, e è la carica dell'elettrone, e $\Lambda = 100$ GeV.

   (a) Scrivere in questa teoria i diagrammi di Feynman che contribuiscono al processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.
   (b) Determinare le ampiezze di elicità corrispondenti, ossia tutte le ampiezze indipendenti nel caso in cui ciascuno dei leptoni entranti ed uscenti sia *left-handed* o *right-handed*, nella regione di energia in cui la massa dei fermioni è trascurabile, ma *non* trascurando i termini di accoppiamento tra fermioni e Higgs.
   (c) Determinare la sezione d'urto differenziale per il processo, e discuterne la dipendenza dall'energia nel centro di massa s e dall'angolo di scattering θ. Confrontare il risultato con quello di pura QED.

2. **Rinormalizzazione dell'accoppiamento di Yukawa Higgs-fermioni.**

   Considerare la lagrangiana data nel problema precedente nel caso in cui $m_e = 0$. Definire $g = e\frac{m_\mu}{\Lambda}$ (costante di accoppiamento di Yukawa).

   (a) Calcolare le correzioni al primo ordine perturbativo al propagatore dell'Higgs, e quelle al propagatore del muone ed al vertice Higgs-fermione dovute allo scambio di Higgs.

(b) Utlizzare il risultato per determinare la funzione β per la costante di accoppiamento di Yukawa g.

3. **Produzione di coppie nel modello standard con un campo di Higgs**

   Si consideri una teoria la cui lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{EW}} + \mathcal{L}_H, \tag{3}$$

   dove $\mathcal{L}_H$ è sempre data dalla Eq. (2), mentre $\mathcal{L}_{\mathrm{EW}}$ è la lagrangiana della teoria elettrodebole SU(2)×U(1), supponendo che i campi dei bosoni vettori W e Z acquisiscano massa attraverso un meccanismo opportuno.

   Ripetere ciascuno dei tre passi del problema 1 in questa nuova teoria.

4. **Decadimento di un campo di Higgs scalare o vettoriale**

   Considerare la teoria descritta dalla Lagrangiana Eq. (1), oppure una sua variante in cui il campo di Higgs è un campo massivo di spin uno, ϕ^μ, il cui accoppiamento con i campi fermionici quindi, anziché la forma $e\frac{m_e}{\Lambda}\bar{\psi}_e\psi_e\phi$ della Eq. (2) ha la forma

$$\mathcal{L}_{H\ell\ell} = e\frac{m_e}{\Lambda}\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e\phi_\mu. \tag{4}$$

   (a) Determinare la distribuzione angolare di decadimento dell'Higgs in una coppia fermione-antifermione in un sistema di riferimento in cui esso si muove con impulso $p_H = (E, 0, 0, p)$ lungo l'asse z, in funzione dell'angolo θ di uscita del fermione, sia nel caso di Higgs scalare che nel caso di Higgs vettoriale. Nel caso vettoriale, discutere separatamente i contributi corrispondenti agli stati di polarizzazione longitudinale e trasversa.

   (b) Confrontare i risultati ottenuti nei due casi e discutere se e come lo spin dell'Higgs possa essere discriminato attraverso una misura della distribuzione angolare.

1. **Distribuzione in q_T del W**
   Si consideri la distribuzione in impulso trasverso di un W prodotto in una collisione adronica, che può essere scritta in forma fattorizzata come

$$\frac{d\sigma}{dq_T^2}(q_T, M_W, s) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, f_{a/h_1}(x_1, M_W^2)\, f_{b/h_2}(x_2, M_W^2)\, \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T, M_W, \hat{s}, \alpha_s(M_W^2)) \tag{5}$$

   (ponendo tutte le scale eguali a M_W) in termini di una sezione d'urto partonica $\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}$ e di distribuzioni partoniche $f_{i/h_j}(x_2, M_W^2)$ per l'i-esimo partone nel j-esimo adrone.

   (a) Si calcoli la sezione d'urto partonica $\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}$ all'ordine α_s^0 (Born).

   (b) Si calcoli il contributo di emissione reale di ordine α_s nel canale $q\bar{q}$, e si ottenga un'espressione per la sezione d'urto partonica allo stesso ordine. Si discutano la struttura di singolarità infrarosse e collineari del risultato.

   (c) Si dimostri che la sezione d'urto Eq. (5) si può scrivere in forma completamente fattorizzata eseguendo una trasformata di Mellin rispetto alla variabile $z \equiv \frac{M_w^2}{\hat{s}}$ ed una trasformata di Fourier rispetto alla variabile $\vec{q}_T$, ed in particolare definendo la trasformata di Fourier della sezione d'urto partonica:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{0,\,ab}} \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T, M_W, N) = \frac{M_W^2}{2\pi} \int d^2b\, e^{-i\vec{q}_T\cdot\vec{b}}\, \Sigma_{ab}(\vec{b}, M_W, N) \tag{6}$$

   dove N è la variabile di Mellin coniugata a $M_W^2/\hat{s}$, $\hat{\sigma}_0$ è la sezione d'urto partonica Born.

   (d) Si dimostra che la sezione d'urto partonica a tutti gli ordini in α_s contiene dei termini logaritmici in $\vec{q}_T$, che si possono ottenere da un'espressione risommata. Quest'ultima fornisce un'espressione per $\Sigma_{r,\,ab}(\alpha_s, L)$, che contiene tutti i contributi logaritmici alla sezione d'urto partonica:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{0,\,ab}} \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T, M_W, N) = \int_0^{+\infty} d\hat{b}\, \hat{b}\, J_0(\hat{b}\hat{q}_T)\, \Sigma(\alpha_s, L), \tag{7}$$

   dove $\hat{b} \equiv M_W b$, $\hat{q}_T^2 \equiv \frac{q_T^2}{M_W^2}$ $J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-iz\cos\theta}$ è la funzione di Bessel, $L \equiv \ln \frac{1}{M_W^2 b^2}$, e si dimostra che, considerando per semplicità il caso di un singolo partone, $\Sigma_r(\alpha_s, L)$ può essere scritta nella forma

$$\Sigma_r(\alpha_s, \alpha_s L, N) = H(\alpha_s(M_W^2), N) \exp S(\alpha_s, \alpha_s L, N), \tag{8}$$

$$S(\alpha_s, \alpha_s L) \equiv -\int_{\frac{1}{b^2}}^{M_W^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \left[\ln \frac{M_W^2}{\mu^2} A(\alpha_s(\mu^2)) + B(\alpha_s(\mu^2), N)\right] \tag{9}$$

dove

$$\begin{aligned} A(\alpha_s) &= A_1\alpha_s + A_2\alpha_s^2 + \ldots; & (10)\\ B(\alpha_s, N) &= B_1(N)\,\alpha_s + \ldots; & (11)\\ H(\alpha_s) &= 1 + H_1(N)\alpha_s + \ldots & (12)\end{aligned}$$

Si discuta a quale ordine perturbativo entra ciascuno dei coefficienti A_i, B_i, H_im e si determini il coefficiente A_1 per confronto con il calcolo all'ordine α_s al punto precedente nel canale quark-quark.

2. **Produzione associata di Higgs e W**

   Si consideri la sezione d'urto di produzione associata di Higgs e W o Z in collisione protone-protone o protone-antiprotone

   (a) Si scriva l'espressione fattorizzata per questo processo. Si discuta quali sottoprocessi partonici contribuiscono ad esso all'ordine α_s^0 ed all'ordine α_s e si disegnino i diagrammi di Feynman corrispondenti.

   (b) Si calcolino ad albero la sezione d'urto differenziale e quella totale per il sottoprocesso partonico $q\bar{q} \to HV$.

   (c) Si dimostri che la sezione d'urto totale calcolata al punto precedente si può scrivere nella forma

   $$\frac{d\sigma}{dk^2}(q\bar{q} \to HV) = \sigma(q\bar{q} \to V^*)\frac{d\sigma}{dk^2}(V^* \to HV),$$

   dove k^2 è la massa invariante della coppia HV, V indica W o Z e V^* indica un bosone virtuale di massa k^2. Si dimostri che questo resta vero al primo ordine in α_s.

   (d) Si usi il risultato al punto precedente per mettere in relazione le correzioni all'ordine α_s al processo partonico con quelle calcolate nel problema precedente, e se ne determini la forma.

3. **Teorema ottico per il decadimento $H \to \bar{b}b$**
Il teorema ottico mette in relazione la sezione d'urto totale σ_{tot} per un processo di scattering con la parte immaginaria della corrispondente ampiezza di probabilità $\mathcal{M}_{aa}$ nella direzione in avanti:

$$2\text{Im}(\mathcal{M}_{aa}) = \Phi\sigma_{tot}, \tag{13}$$

dove Φ è il fattore di flusso.

   (a) Si determini la parte immaginaria della correzione di self-energia al propagatore di uno scalare di Higgs dovuta ad a un loop in cui circolano quark bottom.

   (b) Si usi il risultatoal punto precedente per calcolare la larghezza totale di decadimento del bosone di Higgs in una coppia bottom-antibottom.

   (c) Si confronti il risultato ottenuto al punto precedente con quello ricavato integrando l'ampiezza modulo quadro del decadimento $H \to b\bar{b}$ su tutto lo spazio delle fasi della coppia $b\bar{b}$.

4. **Lagrangiana efficace per il settore di Higgs del modello standard**

   (a) Si scriva la più generale lagrangiana invariante sotto trasformazioni di gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ che contenga operatori di dimensione $d \leq 5$ con almeno un campo scalare di Higgs.

   (b) Si discuta per quali valori dei coefficienti che moltiplicano i vari operatori si ritrova la lagrangiana del settore scalare del Modello Standard.

   (c) Si consideri ora il processo di produzione di un bosone di Higgs e il suo successivo decadimento nella "narrow-width approximation", corrispondente al punto (c) del problema 2. Si combinino i vari modi di produzione e decadimento premessi dalla lagrangiana del punto (1), limitatamente a processi con due partoni nello stato iniziale e due particelle nello stato finale ($2 \to 2$), e si scriva un'espressione per la larghezza dell'Higgs che tenga conto dei contributi relativi dei decadimenti in fermioni e bosoni vettori.

   (d) Si discuta per ciascun processo permesso la sua sensibilità agli accoppiamenti della lagrangiana, e si ipotizzi una strategia complessiva poer la misura dei vari accoppiamenti.