TEORIA DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI
PROBLEMI

Cenni di teoria quantistica dei campi

(1) I generatori delle traslazioni P^μ e delle trasformazioni di Lorentz $J^{\mu\nu}$ soddisfano le relazioni di commutazione

$$[P^\mu, P^\nu] = 0;$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}\right);$$

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = -ig^{\mu\rho}P^\nu + ig^{\nu\rho}P^\mu.$$

Dimostrare che gli operatori P^2 e W^2, con $W^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{\rho\sigma}$ commutano con tutti gli operatori P e J.

(2) Determinare il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ per l'elettrodinamica classica utilizzando il teorema di Noether. Dimostrare che il risultato ottenuto non è simmetrico, ma può essere simmetrizzato sommando ad esso un termine della forma $\partial_\alpha K^{\alpha\mu\nu}$, con $K^{\alpha\mu\nu} = -K^{\mu\alpha\nu} = F^{\alpha\mu}A^\nu$. Dimostrare che l'aggiunta di questo termine lascia invariati i valori dell'energia e dell'impulso totali, e determinare la densità di energia e di impulso usando la forma simmetrizzata.

(3) Verificare che l'impulso determinato usando il teorema di Noether per un campo scalare reale, cioè

$$\vec{P} = -\int d^3x \dot{\phi}(\vec{x},t)\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)$$

genera le traslazioni dell'operatore di campo, ossia

$$[\vec{P}, \phi(\vec{x},t)] = i\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t).$$

Utilizzare la decomposizione di ϕ in termini di operatori di creazione e distruzione per la $\vec{k}$–esima frequenza e le relazioni di commutazione tra questi ultimi.

(4) Considerare la teoria di un campo scalare carico, data dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi.$$

Esprimere il campo in termini di operatori di creazione e distruzione, e determinare le espressioni in termini di questi ultimi dell'energia e della carica classicamente conservata in seguito all'invarianza $\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\psi$.

(5) Dimostrare che se γ^μ sono matrici $n \times n$ che soddisfano

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\mu}I,$$

dove I è la matrice unità in n dimensioni, allora le matrici

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

soddisfano l'algebra dei generatori del gruppo di Lorentz, data nel problema (1).

(6) Dimostrare che le matrici $\sigma^{\mu\nu}$ definite nel problema precedente soddisfano

$$\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$

dove

$$\Lambda_{1/2} = \exp -\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\exp -\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu$$

e $J^{\alpha\beta}$ sono i generatori del gruppo di Lorentz

$$\left(J^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu = i\left(g^{\mu\alpha}g^\beta{}_\nu - g^{\mu\beta}g^\alpha_\nu\right).$$

È sufficiente dimostrare il risultato per trasformazioni infinitesime.

(7) Determinare esplicitamente gli spinori u e v che soddisfano le equazioni di Dirac per stati di definito impulso

$$(\not{p} - m)u(p) = 0; \quad (\not{p} + m)v(p) = 0$$

nel sistema di riferimento di quiete, e dimostrare che le due soluzioni indipendenti possono essere scelte come stati di definito spin lungo un asse qualunque. Utilizzare la rappresentazione di Weyl delle matrici γ^μ. Discutere la normalizzazione delle soluzioni.

(8) Determinare le soluzioni dell'equazione di Dirac nel caso in cui $m = 0$ in un sistema di riferimento in cui l'impulso è diretto lungo l'asse z. Dimostrare che se le soluzioni sono autostati di γ_5, l'autovalore associato è uguale o opposto all'elicità a seconda che si tratti di soluzioni di energia positiva o negativa.

(9) Dimostrare che le soluzioni dell'equazione di Dirac a $m = 0$ ricavate al punto precedente si possono ottenere da quelle con $m \neq 0$ nel limite di alta energia $\frac{E}{m} \to \infty$.

(10) Esprimere il campo di Dirac in termini di operatori di creazione e distruzione e determinare in termini di essi la Hamiltoniana.

(11) Determinare la regola di Feynman per i vertici dell'elettrodinamica scalare, definita dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

dove la derivata covariante è $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

(12) Dimostrare che il prodotto dell'elemento di matrice della corrente $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ in uno stato qualunque, per l'impulso $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$ (dove p_μ e p'_μ sono rispettivamente l'impulso del fermione entrante ed uscente) è uguale alla differenza degli inversi di due propagatori fermionici con impulso p_μ e p'_μ (identità di Ward).

(13) Dimostrare che in una teoria di gauge non-abeliana l'ampiezza di scattering ad albero M per il processo di scattering Compton $gf \to gf$ (dove g ed f indicano rispettivamente un campo di gauge ed un fermione) è trasversa, ossia che, indicando con k_i gli impulsi dei campi di gauge e con ϵ_i i loro vettori di polarizzzione, allora se $M = \epsilon^\mu(k_1)\epsilon^\nu(k_2)M_{\mu\nu}$ allora

$$k_1^\mu \epsilon^\nu(k_2)M_{\mu\nu} = \epsilon^\mu(k_1)k_2^\nu M_{\mu\nu} = 0.$$

Processi ad albero in QED e teorie affini

(1) Calcolare l'ampiezza per il processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ quando tutte le particelle entranti ed uscenti sono polarizzate, nel limite di alta energia in cui si trascurano tutte le masse. Dimostrare che l'ampiezza è diversa da zero solo quando le elicità delle due particelle entranti sono diverse tra loro, e le elicità delle due particelle uscenti sono anch'esse diverse tra loro. Calcolare le due ampiezze $e_R^+e_L^- \to \mu_R^+\mu_L^-$ e $e_R^+e_L^- \to \mu_L^+\mu_R^-$ e dimostrare che le restanti due ampiezze di elicità nonnulle sono eguali a queste.

(2) Determinare la sezione d'urto differenziale per l'urto $e^+e^- \to e^+e^-$, nel limite di alta energia in cui la massa degli elettroni é trascurabile. Determinare il risultato in termini di invarianti di Mandelstam e quindi nel centro di massa della coppia leptonica. Discutere la dipendenza della sezione d'urto dall'energia e dall'angolo, ed in particolare studiare il limite $\theta \to 0$. *(esame 2005)*

(3) Considare l'urto elastico elettrone-elettrone in QED, ossia il processo $e^-e^- \to e^-e^-$ (scattering Møller), nel limite in cui si può trascurare la massa degli elettroni. Scrivere gli accoppiamenti del fotone ai fermioni in termini di componenti left–handed (L) e right–handed (R).

   (a) Determinare le sezioni d'urto polarizzate $\sigma_{LL},\ \sigma_{LR},\ \sigma_{RL},\ \sigma_{RR}$.

   (b) Verificare che la sezione d'urto totale non polarizzata coincide con la somma delle quattro sezioni d'urto polarizzate. Discutere se vi sia una regione di energia in cui il risultato ottenuto fornisce una descrizione sufficientemente accurata per il processo fisico. *(esame 2006)*

(4) Considerare la teoria di un campo scalare complesso ϕ accoppiato ad un potenziale elettromagnetico A^μ, con lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

dove la derivata covariante è $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

(a) Determinare le regole di Feynman per questa teoria.

(b) Considerare la teoria ottenuta combinando l'elettrodinamica ordinaria con quella scalare, cioè contenente un campo scalare complesso, un campo di elettrone ed il campo elettromagnetico, e calcolare in questa teoria la sezione d'urto per il processo

$$e^+e^- \to \phi\phi^*.$$

(c) Discutere il risultato della precedente domanda confrontandolo con quello ottenuto a lezione per la sezione d'urto per il processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

(esame 2006)

(5)

(a) Determinare la sezione d'urto differenziale per i processi:

$$\gamma\gamma \to e^+e^-$$
$$\gamma\gamma \to \phi\phi^*$$

rispettivamente in QED ed elettrodinamica scalare, senza trascurare le masse dell'elettrone e del campo scalare. Confrontare i risultati ottenuti nei due casi.

(b) Utilizzare le ampiezze calcolate al punto precedente per determinare le sezioni d'urto per i processi inversi:

$$e^+e^- \to \gamma\gamma$$
$$\phi\phi^* \to \gamma\gamma$$

e discutere anche in questo caso i risultati. *(esame 2006)*

(6) Considare l'urto elastico elettrone-protone in QED, ossia il processo $e^-p \to e^-p$, nel limite in cui si può trascurare la massa dell'elettrone.

(a) Dimostrare che il vertice fotone-nucleone definito da

$$\langle p'| \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) |p\rangle = e\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)\varepsilon_\mu(q)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p')$$

può essere parametrizzato mediante due fattori di forma $F_i(q^2)$ con $q_\mu = p_\mu - p'_\mu$:

$$\Gamma^\mu = F_1(q^2)\gamma^\mu + \kappa F_2(q^2)\frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2M_p}q^\nu$$

normalizzati come $F_1(0) = F_2(0) = 1$.

(b) Determinare la sezione d'urto differenziale nel sistema di riferimento di quiete del protone iniziale in termini dell'energia E dell'elettrone incidente e dell'angolo θ di diffusione dell'elettrone (formula di Rosenbluth).

(esame 2007)

Calcoli ad un loop e rinormalizzazione

(1) Considerare la teoria descritta dalla seguente lagrangiana (teoria di Yukawa):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + g\bar{\psi}\psi\phi + \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\phi\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2.$$

Determinare la funzione β per la costante d'accoppiamento g all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni. *(esame 2005)*

(2) Considerare la prima correzione di ordine superiore al propagatore di un fotone di impulso q^{μ} in QED, supponendo che il propagatore all'ordine zero sia semplicemente dato da $\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$, cioè trascurando complicazioni legate alla somma sulle polarizzazioni.

(a) Dimostrare che il risultato può essere scritto nella forma

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{1}{1-\Pi(q^2)}\right),$$

e determinare la funzione $\Pi(q^2)$ (self-energia del fotone) all'ordine e^2 in $4-2\epsilon$ dimensioni.

(b) Interpretare il prodotto di e^2 moltiplicato per il residuo del polo del propagatore a $q^2 = 0$ come carica elettrica efficace, e usare il risultato del punto precedente per determinare la funzione β della QED. *(esame 2006)*

(3) Considerare una teoria contenente un campo scalare reale ϕ di massa M accoppiato ad un campo fermionico di Dirac ψ di massa m attraverso l'interazione di Yukawa

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\phi.$$

(a) Determinare le regole di Feynman per questa teoria.

(b) Esprimere il propagatore fermionico come

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon - \Sigma(\not{p})}$$

e determinare esplicitamente $\Sigma(\not{p})$ (self–energia) all'ordine g^2.

(c) Supporre che il campo fermionico fisico ψ e la massa fisica m siano legati alle quantità che compaiono nella lagrangiana da

$$\psi_{\text{phys}} = Z_{\psi}^{-1}\psi$$
$$m_{\text{phys}} = Z_{m}^{-1}m$$

e determinare le costanti Z_{ψ} e Z_m in modo da eliminare le divergenze nel propagatore. *(esame 2007)*

Modello Standard

(1) Calcolare i fattori di colore per la correzione di self-energia fermionica e gluonica ad una linea di gluone, e per la correzione di self-energia gluonica ad una linea di quark.

(2) Considerare il decadimento del quark *top* in un bosone W e un quark *bottom*:

$$t \to W + b$$

   (a) Calcolare la larghezza totale di decadimento, nell'approssimazione in cui la massa del quark b è trascurabile.

   (b) Calcolare le larghezze di decadimento parziali corrispondenti ai diversi stati di polarizzazione del bosone W. *(esame 2005)*

(3)

   (a) Calcolare la sezione d'urto ad albero per i processi di annichilazione quark–antiquark in bosoni vettori: $q\bar{q} \to W^{\pm}$ e $q\bar{q} \to Z$. Discutere la distribuzione angolare dei bosoni vettori rispetto alla direzione dei quark entranti.

   (b) Calcolare ad albero le sezioni d'urto $u\bar{u} \to Z \to l^+l^-$ e $u\bar{d} \to W^+ \to l^+\nu_l$. Discutere le correlazioni angolari tra il leptone carico positivamente nello stato finale ed i quark entranti. *(esame 2006)*

(4) Determinare l'angolo di mixing debole $\sin^2\theta_W$ dal rapporto delle sezioni d'urto totali

$$R = \frac{\sigma_{tot}(\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-)}{\sigma_{tot}(\bar{\nu}_\mu e^- \to \bar{\nu}_\mu e^-)}.$$

(esame 2006)

(5) Calcolare l'ampiezza per il processo $e^+e^- \to W^+W^-$ in una teoria in cui gli elettroni sono accoppiati a bosoni vettori intermedi massivi di spin uno con il solo vertice di interazione $e\nu_e W$. Mostrare che questa ampiezza viola l'unitarietà ad alta energia. *(esame 2006)*

(6) Considerare il processo $q\bar{q} \to \mu^+\mu^-$ dove q è un quark up o down nel modello standard elettrodebole.

   (a) Determinare in termini di invarianti di Mandelstam la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{dt}$. Supporre che l'energia del centro di massa della collisione sia $s > M_z^2$.

   (b) Utilizzare il risultato del punto precedente per determinare la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{dp_T^2}$ dove $\vec{p}_T$ e' l'impulso trasverso del muone, ossia la componente del tri-impulso del muone nel piano ortogonale alla direzione delle particelle nello stato inziale. *(esame 2007)*

(7) Considerare il decadimento $\pi^+ \to \ell^+\nu_\ell$ dove ℓ^+ è un (anti)leptone carico (positrone o muone+) e ν_ℓ il relativo neutrino, nell'ambito della teoria di Fermi.

   (a) Dimostrare che l'elemento di matrice della corrente adronica $J_h^\mu \equiv \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d$ tra il vuoto e uno stato di pione con impulso p ha la forma

$$\langle 0|J_h^\mu|\pi^+(p)\rangle = i\sqrt{2} f_\pi p_\mu,$$

dove f_π è una costante con le dimensioni di massa.

(b) Calcolare il tasso di decadimento in funzione di f_π, m_π e m_ℓ (rispettivamente massa del pione e del leptone carico).

(c) Calcolare il rapporto tra il tasso di decadimento in positroni e muoni per valori realistici delle masse e discutere il risultato. *(esame 2007)*