ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

13 settembre 2005

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema descritto dalla hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{1}$$

e soggetto alla perturbazione

$$V_\epsilon = \epsilon q \tag{2}$$

(1) Si determini l'elemento di matrice:

$$\langle m|V_\epsilon|n\rangle \tag{3}$$

dove $|n\rangle$, $|m\rangle$ sono rispettivamente l'n-esimo e l'm-esimo autostato dell'hamiltoniana H_0 eq. (1), e si discuta se H_0 e V_ϵ possano essere diagonalizzati simultaneamente.

(2) Utilizzando il risultato della domanda precedente, si calcolino le correzioni perturbativa all'n-esimo autovalore dell'hamiltoniana H_0 eq. (1), dovuta alla perturbazione V_ϵ eq. (2), al primo ed al secondo ordine.

(3) Si calcoli *in rappresentazione di interazione* la dipendenza dal tempo del potenziale V_ϵ eq. (2).

(4) Si determini esattamente lo spettro dell'hamiltoniana

$$H = H_0 + V_\epsilon \tag{4}$$

e si confonti il risultato con il calcolo perturbativo della domanda 2.
Suggerimento: si riscriva l'hamiltoniana H nella forma di una hamiltoniana di oscillatore armonico, a meno di una costante additiva.

(5) Si dimostri che

$$H = T^\dagger H_0 T - \frac{\epsilon^2}{2m\omega^2} \tag{5}$$

dove l'operatore T è definito da

$$T \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{m\omega^2}p\right), \tag{6}$$

in termini dell'operatore impulso p. Si interpreti il risultato.

(6) Si determini la dipendenza dal tempo del valore medio della posizione q in uno stato preparato nello stato fondamentale $|0\rangle$ di H_0 al tempo $t = 0$, ma la cui evoluzione temporale è determinata dall'hamiltoniana completa H.
Suggerimento: si costruisca a $t = 0$ l'operatore $\tilde{q} = T^\dagger q T$ e se ne determini l'evoluzione temporale mediante la rappresentazione di Heisenberg.