

ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

1 febbraio 2013

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \gamma^0 \left[mc^2 + c \sum_{k=1}^3 \gamma^k \left(p_k - \frac{q}{c} A_k \right) \right] + qA^0 \quad (1)$$

dove c è la velocità della luce e tutto il resto è ovvio.

(1) Bene, ci sono domande?

(2) Ricavare l'equazione di Dirac.

Suggerimento: partire dall'equazione di Schrödinger per la particella libera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

(3) Usando il risultato della prima domanda, si calcoli il seguente commutatore:

$$[A^i, [[q\gamma^l], [[p^j, x^k], L^\mu]] F^\nu]$$

dove F è il tensore di Faraday. Determinare l'evoluzione temporale di tale commutatore, usando in totale meno di tre fogli protocollo.

(4) Scrivere la più generica funzione d'onda che descriva lo stato del gatto di Schrödinger, e dimostrare che, detto A l'operatore

$$A = \vec{C} \cdot \vec{L}$$

dove \vec{C} è l'operatore di caduta, tale funzione d'onda è autofunzione di A , e calcolare anche l'autovalore relativo. Usare il risultato così ottenuto per determinare di che razza sia, e, sfruttando il principio d'indeterminazione, scrivere la matrice densità relativa allo stato gatto.

(5) Generalizzare il concetto di gatto di Schrödinger e scrivere il ket $|\psi\rangle$ come sovrapposizione di autostati dell'operatore di creazione divina; dimostrare quindi che il ket così fabbricato non è altro che la funzione d'onda dell'Universo.

Suggerimento: sfruttare l'isotropia dello spaziotempo.

(6) Determinare la funzione di partizione \mathcal{Z} definita come

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{q,p\} \in \Phi} e^{-\beta H(\{q,p\})}$$

dove Φ è lo spazio delle fasi, che si può facilmente calcolare ricordando gli insegnamenti di Ragusa. Calcolare l'entropia del sistema ed interpretarne il risultato.

(7) Scrivere la più generale teoria quantistica della gravità che rispetti l'assioma della scelta senza usare le seguenti parole: Einstein, Newton, forza, Hawking, gatto, spaziotempo, tensore, Riemann, stringa, brana, dimensione, $g_{\mu\nu}$, particella, simmetria.

(8) Ripartire dal punto (1).