ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

12 gennaio 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Sia consideri un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{1}$$

dove p e x sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva.

(1) Si determinino i commutatori con l'hamiltoniana degli operatori x, p, T (energia cinetica) e V (energia potenziale).

(2) Si discuta quali degli operatori dati alla domanda precedente possano essere diagonalizzati simultaneamente.

(3) Si determini la dipendenza dal tempo degli operatori $x(t)$ e $p(t)$ in rappresentazione di Heisenberg.

(4) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato in cui la posizione ha una certa indeterminazione $\Delta^2 x$. Utilizzando il principio di indeterminazione ed il risultato della domanda precedente, si determini l'indeterminazione minima di una misura di posizione al tempo t.

(5) Si determini la densità di probabilità di risultati per una misura di impulso in uno stato di definita energia.

Suggerimento: si consideri l'equazione di Schrödinger nello spazio degli impulsi.

(6) Si dimostri che le autofunzioni dell'hamiltoniana hanno la forma

$$\langle x|\psi_E\rangle = A \int_0^\infty \cos\left(z(x)t + \frac{t^3}{3}\right) dt. \tag{1}$$

Suggerimento: si sfrutti il risultato della domanda precedente.

(7) Si discuta qualitativamente l'andamento che ci si aspetta abbiano le soluzioni (1) quando $z \to \pm\infty$.