

ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

13 gennaio 2015

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - gx, \quad (1)$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, e g è un parametro reale positivo. Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (2),$$

correttamente normalizzato come $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

- (1) Determinare il valor medio di posizione, impulso, e l'indeterminazione in impulso al tempo $t = 0$.
- (2) Determinare il valore medio di posizione, impulso e l'indeterminazione in impulso ad un tempo t qualunque.

Suggerimento: utilizzare la rappresentazione di Heisenberg.

- (3) Determinare l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana Eq. (1) tra autostati dell'impulso

$$\langle p|H|p'\rangle, \quad (3)$$

dove $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$. Determinare quindi la dipendenza dal tempo di tale elemento di matrice. Interpretare il risultato in termini delle proprietà di invarianza della hamiltoniana.

- (4) Determinare la densità probabilità che una misura di impulso eseguita al tempo $t = 0$ dia come risultato p_0 , e scrivere la funzione d'onda $\langle p|\psi\rangle$ dello stato in cui il sistema si trova immediatamente prima e immediatamente dopo la misura.
- (5) Determinare le autofunzioni $|\psi_E\rangle$ dell'hamiltoniana H ,

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle, \quad (4)$$

nella base degli impulsi, ossia $\langle p|\psi_E\rangle$.

- (6) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare la funzione d'onda al tempo t , $\psi(p, t)$ in cui si trova il sistema della domanda (4), supponendo che la misura di impulso abbia dato come risultato p_0 .
- (7) Dimostrare che la funzione d'onda $\psi(p, t)$ determinata al punto precedente differisce per una pura fase dalla funzione d'onda al tempo $t = 0$ subito dopo la misura, determinare tale fase, ed utilizzare il risultato per determinare il valor medio e l'indeterminazione di una misura di impulso eseguite su questo sistema ad un tempo t qualunque. Confrontare con il risultato ottenuto al punto (2).