ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

26 gennaio 2017

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

(1) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|0\rangle + (1+i)|1\rangle\right], \tag{2}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato dell'hamiltoniana Eq. (1). Determinare il valore medio e l'indeterminazione per una misura di posizione al tempo $t = 0$ nello stato dato.

(2) Utilizzando la rappresentazione di Schrödinger, determinare il valor medio per una misura di posizione a qualunque tempo t nei due casi in cui (a) al tempo $t = 0$ il sistema nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2) oppure (b) al tempo $t = 0$ sul sistema, che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2), viene effettuata una misura di energia. Nel caso (b) fornire la risposta per tutti i possibili risultati della misura di energia, dopo aver detto quali sono questi risultati ed aver determinato le loro rispettive probabilità.

(3) *Domanda di teoria:* Determinare la funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (1) nella base delle posizioni

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle. \tag{3}$$

(4) Supporre ora che il sistema sia accoppiato ad un campo elettrico, cioè che la sua dinamica sia data da

$$H = H_0 + eEx, \tag{4}$$

dove H_0 è la hamiltoniana Eq. (1), eE è una costante reale, ed x è l'operatore posizione. Determinare lo spettro della hamiltoniana H Eq. (4). Una autofunzione di H_0 è anche autofunzione di H?

(5) Definito l'operatore parità $\mathcal{P}$, tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle, \tag{5}$$

determinare la trasformazione effettuata da questo operatore sugli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger$ e a. Utilizzare il risultato per dimostrare che tutte le autofunzioni

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle. \tag{6}$$

della hamiltoniana H_0 sono autostati della parità e determinare l'autovalore associato. Spiegare la ragione di questo risultato.
Suggerimento: ricordare l'espressione dello stato $|n\rangle$ in termini dello stato fondamentale e di operatori di creazione e distruzione.

(6) Dimostrare che $\mathcal{P} = \exp\left(i\pi a^\dagger a\right)$ soddisfa la definizione Eq. (5), dove $a^\dagger$ and a sono operatori di creazione e distruzione.

(7) Scrivere la funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana H Eq. (4) in termini dell'azione dell'operatore di traslazione sulla funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana H_0 Eq. (1). Utilizzare il risultato per dimostrare che lo stato fondamentale della hamiltoniana H è autostato dell'operatore di distruzione a relativo alla hamiltoniana H_0, e determinare il corrispondente autovalore.