

## ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

22 gennaio 2019

*Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti*

Considerare una particella libera di massa  $m$  in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo  $t = 0$  è

$$\psi(x) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{(-\sigma^2(x-x_0)^2 - ik_0x)} \quad (1)$$

- (1) Determinare i valori medi  $\langle x \rangle$  e  $\langle p \rangle$  e le indeterminazioni  $\Delta^2 x$  e  $\Delta^2 p$  di posizione e impulso nello stato dato.
- (2) Determinare la funzione d'onda del sistema dato nello spazio degli impulsi  $\psi(k) = \langle k|\psi \rangle$  a qualunque tempo  $t$  (dove  $|k\rangle$  è l'autostato dell'impulso  $p|k\rangle = \hbar k|k\rangle$ ).
- (3) *Domanda di teoria:* Determinare l'operatore di evoluzione temporale per un sistema avente una hamiltoniana  $H(t)$  tale che  $[H(t), H(t')] = 0$  per ogni  $t, t'$ .
- (4) Determinare l'indeterminazione in impulso del sistema a qualunque tempo  $t$ .

Supporre ora che il sistema sia soggetto ad un potenziale della forma

$$V(x) = -\lambda\delta(x), \quad (2)$$

dove  $\lambda$  è una costante reale positiva e  $\delta(x)$  è la distribuzione delta di Dirac.

- (5) Scrivere l'equazione agli autovalori per la hamiltoniana del sistema dato nella base degli impulsi, ossia in termini della funzione d'onda  $\langle k|\psi \rangle = \psi(k)$  ed utilizzare il risultato per dimostrare che la funzione d'onda per un autostato di energia può essere scelta reale.
- (6) Risolvere l'equazione agli autovalori nello spazio degli impulsi trovata al punto precedente, e dimostrare che essa ammette una soluzione di stato legato se e solo se  $E = -\frac{1}{2}m\kappa^2$  e determinare questa soluzione.

*Suggerimento:* Ricordare l'integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$ .

- (7) Sia detta  $\psi_E(k) = \langle k|\psi_E \rangle$  la funzione d'onda della soluzione determinata al punto precedente, e  $\psi_E(x) = \langle x|\psi_E \rangle$  la corrispondente funzione d'onda nella base delle posizioni. Calcolare il valor medio dell'impulso per un sistema che si trova nello stato

$$\langle x|\psi \rangle = e^{ik_0x}\psi_E(x). \quad (3)$$

*Suggerimento:* Il valor medio richiesto può essere determinato senza calcolare alcun integrale.