ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

17 febbraio 2017

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{1}$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva.

(1) Determinare le equazioni del moto di Heisenberg soddisfatte dagli operatori x, p, T (energia cinetica) e V (energia potenziale). Risolvere quindi le equazioni del moto per gli operatori x e p e utilizzare il risultato per determinare la dipendenza dal tempo di T e V. Commentare la dipendenza dal tempo di p e di $T+V$ in termini delle proprietà di invarianza per traslazioni spaziali e temporali.

(2) Calcolare il commutatore $[x(t), x(0)]$, dove $x(t)$ è l'operatore posizione alla Heisenberg al tempo t. Utilizzare il risultato per determinare l'indeterminazione minima di una misura di posizione eseguita al tempo t su di un sistema che al tempo $t = 0$ si trova in uno stato avente indeterminazione $\Delta^2 x(0)$.

(3) *Domanda di teoria:* Determinare l'operatore di evoluzione temporale $S(t)$ in termini della hamiltoniana per un sistema avente hamiltoniana (a) indipendente dal tempo oppure (b) dipendente dal tempo ma tale che le hamiltoniane a tempi diversi commutano: $[H(t_1), H(t_2)] = 0$ per ogni t_1, t_2.

(4) Supporre che al tempo $t = 0$ venga effettuata una misura di x, che rivela il sistema in uno stato avente posizione x_0. Scrivere la funzione d'onda nella base degli impulsi

$$\langle p|\psi\rangle = \psi(p) \tag{2}$$

subito dopo la misura, nel limite ideale in cui la misura è infinitamente precisa. Discutere la condizione di normalizzazione che questa funzione d'onda deve soddisfare e determinare esplicitamente la corrispondente costante di normalizzazione.

(5) Determinare le autofunzioni della hamiltoniana Eq. (1) nella base degli impulsi, compresa la normalizzazione.

(6) Supporre ora che a partire dal tempo $t = 0$ la dinamica del sistema sia descritta dalla nuova hamiltoniana

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \kappa' \frac{1}{2} m x^2, \tag{3}$$

dove anche $\kappa' \neq \kappa$ è una costante reale positiva. Se il sistema è stato preparato al tempo $t = -\epsilon$ nello stato Eq. (2) determinato alla domanda (4), calcolare, nel limite $\epsilon \to 0$ la probabilità che una misura di energia al tempo $t = +\epsilon$ lo riveli nello stato fondamentale della hamiltoniana.

(7) Determinare la funzione d'onda del sistema al tempo $t > 0$

$$\psi(p, t) = \langle p|S(t)|\psi\rangle, \tag{3}$$

per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato Eq. (2) determinato alla domanda (4) ed $S(t)$ è l'evoluzione temporale per un sistema avente hamiltoniana eq. (1).
Suggerimento: scambiare l'ordine delle integrazioni in energia ed impulso.