ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

11 febbraio 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_\lambda = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda\left(a + a^\dagger\right), \tag{1}$$

dove ω e λ sono costanti reali e positive e a è un operatore tale che

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{2}$$

(1) Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore $a(t)$.

(2) Dimostrare che la hamiltoniana data può essere riscritta nella forma

$$H_\lambda = \hbar\omega\bar{a}^\dagger\bar{a} + K, \tag{3}$$

dove

$$\bar{a} = a + \delta \tag{4}$$

e δ e K sono numeri reali, e determinare il valore di questi numeri.

(3) Determinare il commutatore $[\bar{a}, \bar{a}^\dagger]$ e utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_λ Eq. (1).

(4) Risolvere le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\bar{a}(t)$.

(5) Utilizzare il risultato della domanda precedente per risolvere l' equazione del moto alla Heisenberg per l'operatore $a(t)$ trovata al punto (1).

(6) *Domanda di teoria:* Determinare la funzione d'onda per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato dell'oscillatore armonico nella base delle coordinate. (La normalizzazione non è richiesta).

(7) Supporre ora che il termine proporzionale a λ nella Eq. (1) venga acceso al tempo $t > 0$, ossia che la hamiltoniana dipenda dal tempo nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & t \leq 0; \\ H_\lambda & t > 0. \end{cases}, \tag{5}$$

dove H_λ è la hamiltoniana Eq. (1), e H_0 è data da

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a. \tag{6}$$

Al tempo $t = 0$ (cioè subito prima che venga acceso il termine in λ) viene eseguita una misura di energia sul sistema che dà come risultato $E = 0$. Determinare il valore medio e l'indeterminazione degli operatori x e p definiti in termini degli operatori $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ da

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\bar{a} + \bar{a}^\dagger\right), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\bar{a}^\dagger - \bar{a}\right). \tag{6}$$

Discutere se il sistema si trovi in uno stato di minima indeterminazione e perché.

(8) Determinare il valore medio degli operatori x e p per ogni tempo $t > 0$.

(9) Dimostrare che lo stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura del punto (7) è un autostato dell'operatore $\bar{a}$ Eq. (4) e determinare il corrispondente autovalore.

(10) Determinare la probabilità che il sistema preparato dalla misura del punto (7) venga rivelato nell'n-esimo autostato di energia della hamiltoniana Eq. (1) al tempo $t > 0$. Il risultato dipende dal tempo?