ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

27 febbraio 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Un sistema quantistico può trovarsi in due stati $|1\rangle$ o $|2\rangle$, autostati di un'osservabile O che soddisfano le equazioni agli autovalori

$$O|1\rangle = |1\rangle; \qquad O|2\rangle = -|2\rangle. \tag{1}$$

(1) Il sistema viene preparato in un certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$, e quindi viene effettuata una misura di O. L'operazione (preparazione seguita da misura) è ripetuta più volte. Quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la misura dà sempre come risultato -1, mentre quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$ la misura dà $+1$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e -1 in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma dei vettori di stato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ nella base degli autostati di O .

(2) Da quanti parametri dipende ciascuno di questi vettori di stato e quali e quanti di questi parametri sono inosservabili, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?

(3) Qual è la probabilità che un sistema preparato nello stato $|\phi\rangle$ venga rivelato nello stato $|\psi\rangle$? Il risultato è univocamente determinato, o dipende da qualcuno dei parametri da cui dipendono $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?

(4) Si cosideri un'osservabile P, avente spettro non degenere e tale che lo stato $|\phi\rangle$ della domanda (1) sia autostato di P. Le osservabili O e P sono compatibili? Giustificare la risposta.

(5) Determinare il valor medio e l'indeterminazione dei risultati delle misure di O in ciascuno dei due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che condizione necessaria affinché due operatori siano compatibili è che il loro commutatore nullo (la dimostrazione è richiesta nel caso non degenere).

Supporre ora che la hamiltoniana del sistema abbia la forma

$$H = E\left[|1\rangle\langle 1| + \sqrt{2}\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)\right], \tag{2}$$

dove E è una costante reale positiva con dimensioni di un'energia.

(7) Determinare lo spettro di autovalori e di autostati di energia. La hamiltoniana è compatibile con l'operatore O delle domande precedenti?

(8) Determinare la probabilità che, se il sistema al tempo $t = 0$ viene preparato nello stato $|1\rangle$, una misura al tempo t lo riveli nello stato $|\psi\rangle$ della domanda (1).

(9) Dimostrare che esiste una particolare scelta dei parametri da cui dipende il vettore di stato $|\phi\rangle$ della domanda (1), tale per cui diventa indipendente dal tempo la probabilità che, se il sistema al tempo $t = 0$ viene preparato nello stato $|1\rangle$, una misura al tempo t lo riveli in tale stato $|\phi\rangle$. Dimostrare inoltre che questa scelta determina completamente lo stato $|\phi\rangle$ stesso.

(10) Determinare la matrice densità per un sistema tale che i risultati delle misure dell'osservabile O siano gli stessi di quando il sistema è preparato nello stato $|\phi\rangle$ della domanda sapendo che il sistema si trova in un autostato dell'energia. Determinare inoltre la matrice densità per una miscela statistica di stati che dia gli stessi risultati di queste misure.