ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

25 giugno 2014

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1}$$

con il potenziale $V(x)$ dato da

$$V(x) = \begin{cases} V_-(x) \equiv \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & t < 0 \\ V_+(x) \equiv m\omega^2 \left(-\delta x + \frac{1}{2} x^2\right) & t \geq 0 \end{cases}, \tag{2}$$

dove δ ed ω sono costanti reali.

(1) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle_- + (1 - \sqrt{2}i)\frac{1}{2}|1\rangle_-, \tag{3}$$

dove $|0\rangle_-$ e $|1\rangle_-$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato della hamiltoniana eq. (1-2) quando $t < 0$.
Calcolare il valore medio degli operatori posizione x ed impulso p in questo stato, ossia $\langle\psi|x|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p|\psi\rangle$, e determinare la probabilità che una misura del sistema eseguita al tempo $t = 0$ lo riveli nello stato $|0\rangle_-$.

(2) Determinare per ogni tempo t le seguenti derivate temporali di operatori:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt}, \quad \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dp^2}{dt}, \tag{4}$$

dove tutti gli operatori sono in rappresentazione di Heisenberg.

(3) Dimostrare che esiste un operatore U_δ tale che

$$U_\delta{}^{-1} V_-(x) U_\delta = V_+(x) + \kappa, \tag{5}$$

dove $V_-(x)$ e $V_+(x)$ sono il potenziale (dato nella Eq. (2)) rispettivamente quando $t < 0$ e quando $t > 0$, e κ è una costante. Determinare esplicitamente la forma di U_δ e κ.
Suggerimento: Ricordare la trasformazione dell'operatore posizione sotto traslazioni.

(4) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare gli autovalori di energia della hamiltoniana al tempo $t > 0$, e scrivere gli autostati $|n\rangle_+$ dell'hamiltoniana a $t > 0$ in termini degli autostati $|n\rangle_-$ dell'hamiltoniana a $t < 0$.

(5) Supporre che la misura del punto (1), eseguita a $t = 0$ abbia rivelato il sistema nello stato, $|0\rangle_-$. Determinare valore medio ed indeterminazione per una misura di posizione od impulso immediatamente successiva.

(6) Sfruttando il risultato della domanda (4), determinare il valor medio della misura di posizione del punto (5) se essa viene invece eseguita ad un tempo qualunque $t > 0$.

(7) Sempre supponendo che la la misura abbia rivelato il sistema nello stato $|0\rangle_-$ a $t = 0$, determinare la probabilità che una successiva misura lo riveli nell'n-esimo autostato $|n\rangle_+$ della hamiltoniana al tempo $t > 0$, e determinare la dipendenza dal tempo di questa probabilità.
Suggerimento: Sfruttare il risultato della domanda (4) e ricordare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff.

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{6}$$