# ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

23 giugno 2016

*Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti*

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

(1) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = N\left[(1+i)|0\rangle + 2|1\rangle + (1-i)|3\rangle\right], \tag{2}$$

dove $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|3\rangle$, sono rispettivamente lo stato fondamentale, ed il primo ed il terzo stato eccitato dell'hamiltoniana Eq. (1), ed $N$ è una costante di normalizzazione.
Determinare la costante di normalizzazione $N$. Calcolare quindi il valore medio degli operatori posizione $x$ ed impulso $p$ in questo stato, ossia $\langle\psi|x|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p|\psi\rangle$.
*Suggerimento:* Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{3}$$

(2) Si supponga di poter effettuare sul sistema descritto dal vettore di stato Eq. (2) una misura di energia con un apparato che permette esclusivamente di determinare se l'energia assume un certo valore $E = E'$, oppure un valore diverso; $E'$ è dato da

$$E' = \frac{3}{2}\hbar\omega. \tag{4}$$

Determinare la probabilità che il risultato della misura sia che l'energia *non* è eguale ad $E'$ e scrivere il vettore di stato (correttamente normalizzato) in cui, in tal caso, il sistema si trova dopo la misura. Chiamiamo $|\bar{\psi}'\rangle$ questo stato.

(3) Determinare valor medio e indeterminazione dell'operatore posizione nello stato $|\bar{\psi}'\rangle$.

(4) *Domanda di teoria:* Per un sistema soggetto all'hamiltoniana Eq. (1), ricavare la dipendenza temporale degli operatori di creazione e distruzione $a$, $a^\dagger$. Utilizzare il risultato per esprimere il valor medio degli operatori posizione ed impulso in uno stato qualunque ad un tempo $t$ in termini dei loro valori medi al tempo $t = 0$.

(5) Determinare valor medio e indeterminazione della posizione ad un tempo qualunque $t$ per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\bar{\psi}'\rangle$ delle domande 2-3.

(6) Si supponga ora che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato

$$|\psi''\rangle = \exp\left(i\frac{\delta}{\hbar}p\right)|0\rangle, \tag{5}$$

dove $\delta$ è una costante reale positiva, $p$ è l'operatore impulso, e $|0\rangle$ è lo stato fondamentale. Determinare la probabilità che una misura di energia a qualunque tempo $t > 0$ dia il risultato $E'$ Eq. (4).
*Suggerimento:* ricordare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$.

(7) Scrivere la funzione d'onda nella base delle posizioni

$$\psi''(x) = \langle x|\psi''\rangle, \tag{6}$$

dove $|\psi''\rangle$ è lo stato dato nella Eq. (5).