ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

22 giugno 2018

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \delta x, \tag{1}$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, e δ è un parametro reale. Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \qquad (2),$$

correttamente normalizzato come $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

(1) Determinare il valor medio di posizione, impulso, e l'indeterminazione in posizione ed impulso al tempo $t = 0$.

(2) Determinare il valore medio di posizione, impulso e l'indeterminazione in impulso (ma non in posizione) ad un tempo t qualunque.
Suggerimento: utilizzare la rappresentazione di Heisenberg.

(3) *Domanda di teoria*: Dimostrare che i valori medi degli operatori quantistici posizione ed impulso in uno stato qualunque soddisfano le equazioni del moto classiche (teorema di Ehrenfest).

(4) Determinare ora per lo stato delle domande (1) e (2) l'indeterminazione in posizione a qualunque tempo t. Confrontare il risultato con il vincolo imposto dal principio di indeterminazione applicato agli operatori alla Heisenberg $\Delta x(t)$ e $\Delta x(0)$.

(5) Determinare autovalori ed autofunzioni della hamiltoniana Eq. (1). Discutere se lo spettro sia discreto o continuo, se sia degenere o meno, e se le autofunzioni siano normalizzabili in senso proprio o no, e perché.
Suggerimento: scrivere l'equazione agli autovalori nella base degli impulsi, dove la funzione d'onda è $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$.

(6) Determinare l'operatore di evoluzione temporale $S(t)$ per un sistema governato dalla hamiltoniana Eq. (1). Dimostrare che esso può essere scritto nella forma

$$S(t) = e^{i\theta} \exp\left[\frac{t}{i\hbar}A(p)\right] \exp\left[\frac{t}{i\hbar}B(x)\right], \tag{3}$$

dove $A(p) = a_1 p^2 + a_2 p$ e $B(x) = bx$, con x e p gli operatori posizione ed impulso, a_1, a_2, b e θ costanti opportune, determinando le costanti a_1, a_2 e b (non occorre determinare θ). Usare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]]\right]. \tag{4}$$

Utilizzare il risultato per determinare la dipendenza temporale dell'autofunzione di energia trovata al punto precedente.

(7) Determinare l'andamento delle autofunzioni della hamiltoniana Eq. (1) quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
Suggerimento: scrivere l'equazione agli autovalori nei due limiti dati, tenendo soltanto i termini dominanti.