ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

17 luglio 2008

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

(1) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle, \tag{2}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato dell'hamiltoniana H_0 eq. (1).
Si determinino i valori medi di posizione, impulso ed energia per lo stato dato.
Suggerimento: Si ricordi che $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$.

(2) Si determinino i valori medi di posizione e impulso ad un tempo successivo t.

(3) Si determini la matrice densità del sistema al tempo t, e la si usi per calcolare il valor medio dell'energia a questo tempo. Si discuta se il risultato dipenda dal tempo e perché. Si supponga quindi di effettuare una misura di energia al tempo t. Si determinino i risultati di questa misura, e per ciascuno di essi si diano la relativa probabilità e si scriva la matrice densità del sistema immediatamente dopo la misura.

(4) A partire dal tempo $t + \varepsilon$, sul sistema agisce anche una forza elettrostatica costante, e l'hamiltoniana diventa

$$H = H_0 - Ex. \tag{3}$$

Si determini lo spettro degli autovalori $\overline{E_n}$ di H e se ne scrivano gli autostati $\overline{|n\rangle}$ in termini degli autostati dell'hamiltoniana di partenza H_0 eq. (1).
Suggerimento: Si esprima l'hamiltoniana H Eq. (3) in termini di una hamiltoniana per un oscillatore armonico centrato in $x = \frac{E}{m\omega^2}$.

(5) Si determinino i valori medi di posizione ed impulso nello stato fondamentale $\overline{|0\rangle}$ della hamiltoniana eq. (3).

(6) Si supponga che il risultato della misura di energia al tempo t sia $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Si supponga di compiere una nuova misura di energia al tempo $t' > t$. Si scriva l'espressione per la probabilità P_n che tale misura dia come risultato $\overline{E_n}$, ossia l n-esimo autvalore di H definito al punto (4). Si discuta se le P_n siano tutte diverse da zero o no, e se esse dipendano dal tempo. Si scriva infine la probabilità P'_0 che il sistema al tempo $t' > t$ si trovi nello stesso stato $|0\rangle$ in cui esso si trovava al tempo t, e si discuta se questa probabilità dipenda dal tempo o no.

(7) Nella situazione della domanda precedente, si determini esplicitamente la probabilità P_0 di trovare il sistema nello stato fondamentale $\overline{|0\rangle}$ di H.