ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

17 luglio 2014

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Un sistema unidimensionale viene preparato in certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$. Sul sistema viene eseguita una misura di impulso. Quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$, la misura dà sempre come risultato $\hbar k_1$. Invece quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la la misura dà come risultato $\hbar k_2$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e $-\hbar k_2$ in $\frac{2}{3}$ dei casi.
Scrivere la più generale forma delle funzioni d'onda $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ e $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Da quanti parametri dipende ciascuna di queste funzioni d'onda e quali e quanti di questi parametri sono convenzionali, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?

(2) Determinare valor medio ed indeterminazione di posizione ed impulso per un sistema che si trovi nello stato $|\phi\rangle$, e valor medio ed indeterminazione dell'impulso per un sistema che si trovi nello stato $|\psi\rangle$. *Opzionale* (più difficile): determinare anche valor medio ed indeterminazione della posizione per un sistema che si trovi nello stato $|\psi\rangle$ (supponendo che $k_2 \neq 0$).

(3) Supporre che la dinamica del sistema sia descritta dal potenziale

$$V(x) = \kappa\delta(x), \tag{1}$$

dove κ è una costante reale e $\delta(x)$ è la delta di Dirac.
Scrivere la più generale autofunzione dell'hamiltoniana nelle regioni $x < 0$ e $x > 0$, e le condizioni che raccordano la funzione d'onda e la sua derivata nelle due regioni $x < 0$ ed $x > 0$ (non è necessario risolvere le condizioni per ora).
Suggerimento: per determinare la condizione di raccordo per la derivata della funzione d'onda, ricordare che $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$, e che l'equazione agli autovalori fissa il valore della derivata seconda della funzione d'onda.

(4) Discutere quale ci si aspetta che siano la forma dello spettro di autovalori e la sua degenerazione, e le proprietà di trasformazione delle autofunzioni sotto parità, nei due casi $\kappa > 0$ e $\kappa < 0$.

(5) Scrivere l'equazione agli autovalori del punto (3), ma ora utilizzando la rappresentazione degli impulsi, ossia scrivendo la funzione d'onda come $\langle p|\psi\rangle$.

(6) Nel caso $\kappa > 0$, determinare la forma generale dell'autofunzione di energia per fisso E risolvendo le condizioni di raccordo ricavate al punto (3), supponendo che nella regione $x > 0$ vi sia solo un'onda progressiva. Esiste un'autofunzione di energia che nella regione $x < 0$ coincida con la $\psi(x)$ del punto (1)?

(7) Nel caso $\kappa < 0$, dimostrare che esiste una soluzione di stato legato della forma

$$\langle x|\psi_0\rangle \equiv \psi_0(x) = Ae^{-b|x|} \tag{2}$$

e determinare l'autovalore di energia E in termini di b. Determinare quindi la funzione d'onda nella base degli impulsi $\langle p|\psi_0\rangle$ e determinare b dall'equazione agli autovalori ricavata al punto (5).