ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

23 luglio 2018

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

(1) Sono a disposizione molte copie del sistema, tutte preparate nello stesso stato $|\psi\rangle$. Su ciascuna di esse viene eseguita una misura di energia. In un terzo dei casi si trova che l'energia del sistema è $\frac{\hbar\omega}{2}$, mentre in due terzi dei casi si trova $\frac{3\hbar\omega}{2}$. Qual è la più generale forma del vettore di stato $|\psi\rangle$ compatibile con questo risultato?

(2) Su altre copie del sistema, sempre tutte nello stesso stato $|\psi\rangle$ vengono eseguite misure di posizione, e su altre ancora misure di impulso. Si trova

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{2}$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = 0 \tag{3}$$

Determinare il vettore di stato $|\psi\rangle$. Per determinare completamente $|\psi\rangle$, oltre all informazione fornita al punto (1), è necessario conoscere sia $\langle\psi|x|\psi\rangle$ che $\langle\psi|p|\psi\rangle$, o basta conoscere uno solo valor medio? Ed in tal caso, è indifferente quale, o bisogna conoscerne uno dei due in particolare?

Suggerimento: Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$.

(3) *Domanda di teoria:* Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché due operatori hermitiani aventi spettro non degenere siano simultaneamente diagonalizzabili è che commutino.

(4) Per tempi $t < 0$ la dinamica del sistema è descritta dalla hamiltoniana

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_0)^2, \tag{4}$$

dove z_0 è una costante reale. Determinare gli operatori di creazione e distruzione relativi a questa hamiltoniana. Dimostrare che le hamiltoniane Eq. (1) ed Eq. (4) sono unitariamente equivalenti, ossia che hanno gli stessi autovalori, e determinare la trasformazione unitaria che lega gli autovettori di H Eq. (1) a quelli di H' Eq. (1). Determinare inoltre l'azione di questa trasformazione sugli operatori x e p.

(5) Considerare ora un sistema preparato nello stato fondamentale della hamiltoniana H' Eq. (4), ma la cui evoluzione temporale a partire dal tempo $t = 0$ è data dalla hamiltoniana H Eq. (4). Determinare per ogni tempo $t \geq 0$ i valori medi di posizione ed impulso per questo sistema.

(6) Dimostrare che il ket di stato della domanda precedente al tempo $t = 0$ è un autostato dell'operatore di distruzione relativo alla hamiltoniana Eq. (1) e determinare l'autovalore corrispondente.

Suggerimento: considerare l'azione sull'operatore a della trasformazione determinata al punto (4).

(7) Considerare l'operatore $\exp i\left(\pi a^\dagger a\right)$, dove a e $a^\dagger$ sono gli operatori di creazione e distruzione relativi alla hamiltoniana Eq. (1). Determinare l'azione di questo operatore sullo stato della domanda (5) al tempo $t = 0$.

Suggerimento: sviluppare lo stato dato sulla base degi autostati della hamiltoniana Eq. (1).