ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

15 settembre 2016

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo $t = 0$ è

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|} e^{ikx} \tag{1}$$

con α e k reali, e $\alpha > 0$.

(1) Determinare i valori medi $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$ di posizione e impulso nello stato dato.
Suggerimento: per calcolare $\langle p \rangle$ spezzare l'integrale in due regioni, tra $-\infty$ e 0, e tra 0 e ∞.

(2) Determinare i valori medi $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$ per ogni tempo t.

(3) Dimostrare che il valor medio di p^2 nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1) è dato da

$$\langle p^2 \rangle = \langle \phi | \phi \rangle, \tag{2}$$

dove lo stato $|\phi\rangle$ è dato da $|\phi\rangle = p|\psi\rangle$. Utilizzare il risultato per calcolare la indeterminazione $\Delta^2 p$ dell'impulso nello stato dato dalla Eq. (1).

(4) Determinare anche l'indeterminazione in posizione $\Delta^2 x$ al tempo $t = 0$ e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione di Heisenberg. Discutere che cosa succede nel limite $\alpha \to \infty$.

(5) *Domanda di teoria:* ricavare dall'equazione di Schrödinger le leggi del moto alla Heisenberg e dimostrare che l'evoluzione temporale del valor medio di un operatore è la stessa in rappresentazione di Schrödinger e di Heisenberg.

(6) Si considerino la relazioni di indeterminazione che legano: (a) una misura di posizione ed una misura di impulso entrambe al tempo t; (b) una misura di posizione al tempo t ed una misura di posizione al tempo $t = 0$; (c) una misura di posizione al tempo t ed una misura di impulso al tempo $t = 0$. Da ciascuna di queste relazioni si può ricavare una disugaglianza per l'indeterminazione $\Delta^2 x(t)$. Determinare, per lo stato dato dalla Eq. (1), quale di queste disuguaglianze è più restrittiva a seconda del tempo t.

(7) Dimostrare che la funzione d'onda Eq. (1) con $k = 0$ è autostato dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda\delta(x) \tag{3}$$

per λ reale e positivo, e determinare la relazione tra le costanti λ e α, e l'autovalore di energia.

(8) Determinare la probabilità che eseguendo un'opportuna misura su un sistema preparato nell'autostato dell'hamiltoniana dato nella domanda precedente esso venga rivelato nello stato dato dalla Eq. (1) con k generico. Discutere che cosa succede nel limite $\alpha \to \infty$.