ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

21 settembre 2018

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella di massa m vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza $2L$, cioè soggetta al potenziale

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } |x| > L \\ 0 & \text{se } |x| \leq L \end{cases} \tag{1}$$

Siano $|1\rangle$ lo stato fondamentale, $|2\rangle$ il primo stato eccitato, $|3\rangle$ il secondo, e così via.

(1) Dati i due stati

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2\rangle, \tag{2}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|3\rangle, \tag{3}$$

determinare i valori medi degli operatori x ed H in ciascuno dei due stati.
Suggerimento: Ricordare gli integrali

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^{L} \sin^2 \frac{x\pi}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{x\pi}{2L}\, dx = \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{3x\pi}{2L}\, dx = L \\ &\int_{-L}^{L} x \sin \frac{x\pi}{L} \cos \frac{x\pi}{2L}\, dx = \frac{32L^2}{9\pi^2} \end{aligned} \tag{4}$$

(2) Per un sistema che si trova nell'uno o nell'altro degli stati $|\psi_1\rangle$ Eq. (2) o $|\psi_2\rangle$ Eq. (3), determinare i possibili risultati di una misura di energia, le loro probabilità, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura. Determinare inoltre i possibili risultati di una misura di posizione, la loro densità di probabilità, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura.

(3) *Domanda di teoria:* Dimostrare che lo spettro di stati legati per un sistema unidimensionale è non-degenere.

(4) Determinare il valore medio dell'operatore p ad ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi_1\rangle$ Eq. (2).
Suggerimento: Ricordare l'integrale

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{x\pi}{L} \sin \frac{x\pi}{2L}\, dx = 2 \int_{-L}^{L} \cos \frac{x\pi}{L} \cos \frac{x\pi}{2L}\, dx = \frac{8L}{3\pi} \tag{5}$$

(5) Supporre di avere eseguito una misura di energia immediatamente prima del tempo $t = 0$ e di avere rivelato il sistema nello stato $|1\rangle$. A partire dal tempo $t = 0$, il potenziale diventa $V(x) = 0$ per ogni x, ossia a partire da questo tempo, il sistema diventa libero. Determinare i valori medi di posizione ed impulso e l'indeterminazione in posizione per tutti i tempi successivi. (È sufficiente esprimere l'indeterminazione ad ogni tempo t in termini di quella al tempo $t = 0$).

(6) Determinare i possibili risultati di una misura di energia, eseguita al tempo $t = 0$ oppure a qualunque tempo successivo $t > 0$ sul sistema della domanda precedente, e la loro distribuzione di probabilità.
Suggerimento: Ricordare l'integrale

$$\int_{-L}^{L} \cos kx \cos \frac{x\pi}{2L}\, dx = \frac{4L\pi \cos(kL)}{\pi^2 - 4k^2L^2}.$$

(7) Determinare i possibili risultati di una misura di posizione eseguita a qualunque tempo $t \geq 0$ sul sistema della domanda precedente e la loro distribuzione di probabilità. (Il risultato può essere lasciato sotto forma di integrale senza eseguire l'integrazione).