PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

18 gennaio 2021

Tempo massimo 3 ore. Libri o appunti possono essere consultati liberamente

Considerare un sistema unidimensionale che si trova in uno stato la cui funzione d'onda nella base delle coordinate è

$$\langle x|\psi\rangle = Ne^{-\frac{\sigma}{2}x^2}\left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right), \tag{1}$$

dove N è una costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$,

$$N = \left[2\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\left(1 + e^{-\frac{k_0^2}{\sigma}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

(1) Determinare i valori medi della posizione e dell'impulso.
(2) Determinare la distribuzione di probabilità $\rho(x)$ per una misura di posizione, scrivendone l'espressione esplicita in funzione di x.
(3) Determinare la funzione d'onda nello spazio degli impulsi.
(4) Determinare la distribuzione di probabilità $\rho(k)$ per una misura di impulso, scrivendone l'espressione esplicita in funzione di k.
(5) Discutere qualitativamente quali sono i valori più probabili per una misura di impulso nello stato dato, e qual è l'interpretazione fisica dello stato dato.
(6) Determinare il valor medio di una misura di energia nello stato dato nei due casi in cui l'hamiltoniana del sistema è data da (a) $H = \frac{p^2}{2m}$ oppure (b) $H = \frac{p^2}{2m} - \kappa x$ (con κ reale).
(7) *Domanda di teoria:* Scrivere la condizione necessaria e sufficiente che deve essere soddisfatta dalla funzione d'onda nello spazio delle posizioni affinché lo stato corrispondente sia di minima indeterminazione, e verificare se la funzione d'onda Eq. (1) soddisfi o meno questa condizione. Discutere il risultato.
(8) Determinare il valore medio di posizione ed impulso ad ogni tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova nello stato Eq. (1), scrivendone l'espressione esplicita in funzione di t per ogni tempo (sia $t > 0$ che $t < 0$).
(9) Determinare nuovamente, come nella domanda precedente, il valore medio di posizione ed impulso ad ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato Eq. (1), ma supponendo ora che al tempo $t = 0$ venga eseguita una misura di impulso sul sistema.
(10) Determinare la distribuzione di probabilità di misure di impulso $\rho(k, t)$ ad ogni tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova nello stato Eq. (1), scrivendone l'esplicita espressione in funzione di k e t. Discutere la dipendenza dal tempo e giustificare il risultato.
(11) Determinare il limite per $\sigma \to 0$ della distribuzione $\rho(k, t)$ trovata al punto precedente.