PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

23 gennaio 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella libera unidimensionale, la cui dinamica è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m}, \tag{1}$$

che al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$\langle x|\psi\rangle = N \left(e^{ik_0 x} e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-ik_0 x} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \right), \tag{2}$$

dove α, x_0, k_0 sono costanti reali e positive.

(1) Determinare il valor medio di una misura di posizione al tempo $t = 0$. Che cosa rappresenta fisicamente lo stato dato? Disegnare qualitativamente la densità di probabilità per misure di posizione $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ (nel caso $x_0 \gg 1/\alpha$).

(2) Determinare il valor medio di una misura di impulso al tempo $t = 0$. Disegnare qualitativamente la densità di probabilità per misure di impulso $\rho(k) = |\psi(k)|^2$ (nel caso $k_0 \gg \alpha$).

(3) Determinare l'indeterminazione di una misura di posizione nello stato dato nel caso in cui $k_0 = x_0 = 0$.

(4) Determinare l'indeterminazione di una misura di impulso nello stato dato nel caso in cui $k_0 = x_0 = 0$. Lo stato dato è di minima indeterminazione in questo caso? E nel caso in cui $x_0 \neq 0$ oppure $k_0 \neq 0$ (l'uno, l'altro, o tutt'e due)?

(5) Determinare l'indeterminazione di una misura di posizione e impulso quando $k_0 = x_0 = 0$ ad ogni tempo t.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare il teorema di Ehrenfest, ossia dimostrare che i valori medi degli operatori posizione ed impulso soddisfano le equazioni del moto classiche.

(7) Si supponga di eseguire al tempo $t = 0$ una misura di posizione oppure di impulso sul sistema che si trova nello stato dato dalla Eq. (2). Quali sono i possibili risultati di queste misure e le loro probabilità nel limite in cui $\alpha \to \infty$, mantenendo invariata la condizione di normalizzazione? Determinare inoltre in questo limite la costante di normalizzazione N nella Eq. (1).

(8) Determinare il valore medio di una successiva misura di posizione o di impulso per ogni tempo $t > 0$ supponendo che al tempo $t = 0$ sia stata eseguita la misura di impulso nelle condizioni della domanda precedente.

(9) Se al tempo $t = 0$ invece viene eseguita una misura di posizione, scrivere la funzione d'onda nella base degli impulsi per ogni tempo $t > 0$.

(10) Sviluppare su una base di autostati dell'impulso la funzione d'onda del sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato dato dalla Eq. (2) (per valori generici dei parametri) e scriverne l'espressione ogni tempo t.

(11) Determinare l'ampiezza di probabilità di rivelare nell'origine a qualunque tempo t il sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato dato dalla Eq. (2) (per valori generici dei parametri).