PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

3 febbraio 2021

Tempo massimo 3 ore. Libri o appunti possono essere consultati liberamente

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \hbar \left[\omega a^\dagger a - \mu \left(a^\dagger + a \right) \right], \tag{1}$$

dove ω è una costante reale positiva, μ è una costante reale, e a è un operatore tale che

$$\left[a, a^\dagger \right] = 1. \tag{2}$$

Definire inoltre i tre stati $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ tali che

$$a|0\rangle = 0; \qquad |1\rangle = a^\dagger|0\rangle; \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |1\rangle. \tag{3}$$

(1) Calcolare il valor medio dell'operatore $a^\dagger$ nei tre stati $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$.

(2) Calcolare il valore medio della hamiltoniana H Eq. (1) nei tre stati $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$.

(3) Dimostrare che esiste un operatore

$$b = a + \delta \tag{4}$$

tale che

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + K, \tag{5}$$

e determinare il valore delle costanti δ e K.

(4) Determinare lo spettro di autovalori della Hamiltoniana H Eqs. (1).

(5) Definire la coppia di operatori

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^\dagger \right). \tag{4}$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(b + b^\dagger \right). \tag{5}$$

Determinare la relazione fra questi due operatori, ed utilizzare il risultato per determinare la relazione fra gli autostati $|x\rangle$ di $\hat{x}$ Eq. (4) e gli autostati $|y\rangle$ di $\hat{y}$ Eq. (5). Gli operatori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono compatibili?

(6) Determinare il prodotto scalare $\langle x|y\rangle$.

(7) Determinare il valor medio dell'operatore $\hat{x}$ sia nello stato fondamentale della hamiltoniana H, che nello stato $|0\rangle$ definito nella Eq. (3).

(8) Al tempo $t = 0$ il sistema viene preparato nello stato $|0\rangle$ definito nella Eq. (3). Determinare la probabilità di rivelare il sistema nello stato fondamentale della hamiltoniana H ad un tempo $t = T$, supponendo che l'evoluzione temporale sia determinata dalla hamiltoniana H Eq. (1); il calcolo dell'integrale non è richiesto.

(9) Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'operatore $\hat{x}$ Eq. (4), che rivela il sistema nell'autostato corrispondente all'autovalore x_0. Determinare la probabilità di rivelare il sistema nello stato fondamentale della hamiltoniana H ad un tempo $t = T$ (l'evoluzione temporale è sempre determinata dalla hamiltoniana H Eq. (1)).

(10) *Domanda di teoria:* Che tipo di stato è lo stato $|0\rangle$? Utilizzare il risultato per calcolare l'integrale al punto (8).

(11) Determinare le equazioni del moto per l'operatore $\hat{x}$ (l'evoluzione temporale è sempre determinata dalla hamiltoniana H Eq. (1)) ed utilizzare il risultato per calcolare il valor medio di $\hat{x}$ nello stato fondamentale della hamiltoniana H ad ogni tempo t.