PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

6 febbraio 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \lambda a^\dagger a, \tag{1}$$

dove λ è una costante reale e positiva e a è un operatore tale che

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{2}$$

(1) Al tempo $t = 0$ viene misurata l'energia del sistema. Quali sono i risultati possibili di questa misura?

(2) Ad un tempo successivo $t = T$ l'energia viene misurata di nuovo. Quali sono i valori possibili di questa seconda misura, in base al risultato della misura precedente?

(3) Sia $|0\rangle$ lo stato fondamentale della hamiltoniana H Eq. (1). Si definiscano lo stato

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle. \tag{3}$$

e l'operatore

$$x = \frac{1}{2}\left(a + a^\dagger\right). \tag{4}$$

Calcolare il valor medio dell'operatore x nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle. \tag{5}$$

(4) Determinare e risolvere le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori a e $a^\dagger$.

(5) Considerare la nuova hamiltoniana

$$\bar{H} = \lambda \bar{a}^\dagger \bar{a}, \tag{5}$$

dove

$$\bar{a} = a + \delta \tag{6}$$

e δ è una costante reale positiva. Determinare lo spettro della hamiltoniana $\bar{H}$.

(6) *Domanda di teoria:* Determinare la funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico nella base delle coordinate.

(7) Determinare il valor medio dell'operatore x Eq. (4) ad ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (5).

(8) Al tempo $t = 0$ viene misurato $\bar{H}$ Eq. (5) e il sistema viene rivelato nel suo stato fondamentale. Determinare il valor medio dell'operatore x Eq. (4) in questo stato.

(9) Nella situazione della domanda precedente, determinare il valor medio di x a tutti i tempi successivi $t > 0$ in termini del suo valor medio al tempo $t = 0$.

(10) Dimostrare che gli operatori H Eq. (1) e $\bar{H}$ Eq. (5) sono unitariamente equivalenti, determinando l'azione di un opportuno operatore unitario T sugli operatori a e $a^\dagger$ che ne preservi le relazioni di commutazione.

(11) Scrivere l'operatore unitario T trovato al punto precedente in termini di un opportuno generatore G_T, e scrivere gli elementi di matrice di questo generatore nella base degli autostati dell'operatore x Eq. (4).