

## PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

23 febbraio 2021

*Tempo massimo 3 ore. Libri o appunti possono essere consultati liberamente*

Considerare un sistema quantistico che può trovarsi in quattro stati esaustivi ed esclusivi, indicati come  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|3\rangle$ ,  $|4\rangle$ .

Considerare inoltre i seguenti stati del sistema:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1\rangle + (1+i)|2\rangle], \quad (1)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [i|1\rangle + |3\rangle], \quad (2)$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|4\rangle, \quad (3)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|3\rangle + |4\rangle]. \quad (4)$$

(1) Determinare la probabilità che un sistema preparato nello stato  $|1\rangle$  venga rivelato in ciascuno dei quattro stati  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$ ,  $|\psi_3\rangle$ ,  $|\psi_4\rangle$ .

(2) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = N \left[ |\psi_1\rangle + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle \right]. \quad (5)$$

Determinare la costante di normalizzazione  $N$ . Determinare inoltre la probabilità che un sistema preparato in questo stato venga rivelato nello stato  $|1\rangle$ .

(3) Supporre che su un sistema che si trova nello stato  $|\phi\rangle$  Eq. (5) venga eseguita una prima misura che rivela che si trova nello stato  $|\psi_2\rangle$ . Qual è la probabilità di trovare questo risultato? Qual è la probabilità che una successiva misura riveli il sistema nello stato  $|1\rangle$ ?

(4) Considerare l'operatore associato all'osservabile  $O_1$ , che prende il valore  $+1$  quando il sistema viene rivelato nello stato  $|\psi_2\rangle$ , e  $0$  quando il sistema viene rivelato in qualunque stato ortogonale a  $|\psi_2\rangle$ . Scrivere la matrice dell'operatore associato a questa osservabile, nella base degli stati  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|3\rangle$ ,  $|4\rangle$ .

(5) Supporre ora che la hamiltoniana del sistema sia  $H = EO_1$ , dove  $O_1$  è l'operatore definito nella domanda (4). Quali sono i possibili valori di energia del sistema? Qual è la probabilità che una misura di energia per un sistema preparato nello stato  $|\psi_1\rangle$  fornisca ciascuno di questi valori?

(6) *Domanda di teoria I:* Scrivere il più generale vettore di stato per il sistema dato. Da quanti parametri dipende questo generico vettore di stato? Quali e quanti di questi parametri sono inosservabili? Se gli stati del sistema aventi la stessa energia non sono distinguibili attraverso nessuna possibile misura, da quanti parametri dipende lo stato del sistema, supponendo che la hamiltoniana sia quella data nella domanda (5)?

(7) *Domanda di teoria II:* Da quanti parametri dipende la matrice densità per il sistema dato, sia per uno stato puro che per uno stato misto?

(8) Considerare ora l'operatore associato all'osservabile  $O_2$ , che prende il valore  $+1$  quando il sistema viene rivelato nello stato  $|\psi_1\rangle$ , e  $0$  quando il sistema viene rivelato in qualunque stato ortogonale a  $|\psi_1\rangle$ . Le osservabili  $O_1$  e  $O_2$  sono compatibili?

(9) Supponendo che l'evoluzione temporale sia data dalla Hamiltoniana  $H$  definita al punto (5), determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato  $|1\rangle$  al tempo  $t = 0$ , sia rivelato al tempo  $t = T$  nello stato  $|2\rangle$ , oppure nello stato  $|3\rangle$ .

(10) Definire l'operatore associato all'osservabile  $O_3$ , che prende il valore  $+1$  quando il sistema viene rivelato nello stato  $|1\rangle$  e  $-1$  quando il sistema viene rivelato nello stato  $|3\rangle$ . Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per questo operatore, sempre supponendo che l'evoluzione temporale sia data dalla Hamiltoniana  $H$  definita al punto (5).

(11) Determinare esplicitamente l'operatore alla Heisenberg  $O_3(t)$  e le sue autofunzioni a qualunque tempo  $t$ .