**PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA**

20 febbraio 2023

*Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti*

Considerare un sistema quantistico che può trovarsi in tre stati esaustivi ed esclusivi, indicati come $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$.

(1) Determinare il più generale vettore di stato $|\psi\rangle$ per questo sistema, specificando da quanti parametri dipende nel caso più generale e quali e quanti di questi parametri sono osservabili.

(2) Vi sono tante copie del sistema del punto precedente, tutte preparate nello stesso stato $|\psi_0\rangle$. Su ciascuna di esse viene effettuata una misura che rivela solo se il sistema si trovi o meno nello stato $|3\rangle$, senza fornire alcuna ulteriore informazione. Il sistema viene rivelato nello stato $|3\rangle$ nella metà dei casi. Determinare la più generale forma del vettore di stato $|\psi_0\rangle$, specificando quanti dei parametri da cui dipende $|\psi\rangle$ del punto (1) sono stati fissati in questo particolare caso.

(3) Sul sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ determinato al punto (1) viene effettuata la misura descritta al punto (2). Determinare gli stati $|\psi_1\rangle$ oppure $|\psi_2\rangle$, correttamente normalizzati, in cui si trova il sistema dopo la misura, a seconda dei due risultati possibili di questa misura.

(4) Su un sistema che si trova nello stato $|\psi_0\rangle$ determinato al punto (2) viene effettuata una misura dell'operatore

$$O_1 = \mu_1|1\rangle\langle 1| + \mu_2|2\rangle\langle 2| + \mu_3|3\rangle\langle 3|, \tag{1}$$

con $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -1$. Quali sono i possibili risultati di questa misura e quali sono le relative probabilità?

(5) Rispondere nuovamente alla domanda (4), se la misura della domanda (4) viene effettuata dopo quella discussa al punto (2), cioè su un sistema che si trova in uno dei due stati $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$.

(6) *Domanda di teoria:* dimostrare che due operatori sono diagonalizzabili simultaneamente se e solo se commutano.

(7) Dato un operatore della forma

$$O_x = \lambda_1|1\rangle\langle 1| + \lambda_2|2\rangle\langle 2| + \lambda_3|3\rangle\langle 3| \tag{2}$$

determinare $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ in modo che soddisfino simultaneamente le seguenti condizioni: $O_x = O_x^\dagger$, $\operatorname{Tr} O_x = 0$, $\lambda_1 = +1$, e che la misura di questo operatore corrisponda alla misura del punto (2).

(8) Considerare l'operatore

$$O_y = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|. \tag{3}$$

Determinare se questo operatore sia compatibile con $O_x$, o, più in generale, con qualunque operatore associato all'osservabile corrispondente alla misura del punto (2).

(9) Se gli operatori $O_x$ ed $O_y$ sono compatibili, determinare la base comune di autostati, e se non lo sono, determinare il vincolo che il principio di indeterminazione pone ai risultati delle loro misure in uno stato dato.

(10) Determinare la probabilità che un sistema preparato nello stato $|1\rangle$ al tempo $t = 0$ venga rivelato nello stesso stato al tempo $t = T$ se la hamiltoniana del sistema è data da

$$H = EO_y, \tag{4}$$

dove $O_y$ è dato dalla Eq. (3) ed $E$ è una costante reale positiva.

(11) Rispondere nuovamente alla domanda (10), supponendo però ora che al tempo $t = 0$ il sistema abbia matrice densità data da

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|\right) \tag{5}$$