PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

22 giugno 2020

Tempo massimo 2 ore. Libri o appunti possono essere consultati liberamente.

Considerare un sistema unidimensionale avente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(x) \tag{1}$$

con potenziale dato da

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \le a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \tag{2}$$

dove a è una costante reale positiva. Considerare lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle + i\sqrt{2}|2\rangle\right) \tag{3}$$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato della hamiltoniana data.

(1) Determinare i possibili risultati di una misura di energia oppure di una misura di impulso per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (3) e le loro probabilità.

(2) Determinare i valori medi di posizione, impulso ed energia nello stato $|\psi\rangle$.
Suggerimento: Ricordare gli integrali seguenti

$$\int_{-a}^{a} \sin^2 \frac{x\pi}{a}\, dx = \int_{-a}^{a} \sin^2 \frac{x\pi}{2a}\, dx = \int_{-a}^{a} \cos^2 \frac{x\pi}{2a}\, dx = a$$

$$\int_{-a}^{a} \sin \frac{x\pi}{a} \sin \frac{x\pi}{2a}\, dx = 2\int_{-a}^{a} \cos \frac{x\pi}{a} \cos \frac{x\pi}{2a}\, dx = \frac{8a}{3\pi}$$

$$\int_{-a}^{a} x \sin \frac{x\pi}{a} \cos \frac{x\pi}{2a}\, dx = \frac{32a^2}{9\pi^2}$$

(3) Determinare i valori medi di posizione ed energia ad ogni tempo t per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (3) al tempo $t = 0$ e la cui evoluzione temporale è governata dalla hamiltoniana H_0 Eqs. (1-2). Discutere se essi dipendano dal tempo e perché.

(4) Considerare ora la hamiltoniana

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + V_1(x) \tag{4}$$

con potenziale

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 2a \\ \infty & \text{se} \quad x > 2a \end{cases}, \tag{5}$$

Determinare la trasformazione che collega gli autostati della hamiltoniana H_0 a quelli della hamiltoniana H_1 ed utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_1 noto quello della hamiltoniana H_0.

(5) Considerare ora un sistema che si trova in uno stato della forma data dalla Eq. (3), ma dove ora la hamiltoniana è H_1 Eq. (4-5), e $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono il suo stato fondamentale ed il suo primo stato eccitato. Determinare i valori medi di posizione, impulso ed energia in questo stato.