

PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

18 giugno 2021

Tempo massimo: 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (1)$$

Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle, \quad (2)$$

dove $|0\rangle$ e $|2\rangle$ sono lo stato fondamentale e il secondo stato eccitato di H .

(1) Calcolare il valor medio dell'operatore posizione x nello stato Eq. (2).

Suggerimento: ricordare che l'operatore di distruzione è $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$.

(2) Calcolare il valor medio dell'operatore impulso p nello stato Eq. (2).

(3) Calcolare l'indeterminazione di posizione nello stato $|\psi\rangle$: $\langle\psi|(\Delta x)^2|\psi\rangle$.

Suggerimento: ricordare che $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ per un autostato $|n\rangle$ di oscillatore armonico.

(4) Calcolare l'indeterminazione di impulso nello stato $|\psi\rangle$: $\langle\psi|(\Delta p)^2|\psi\rangle$. Lo stato è di minima indeterminazione?

(5) Considerare un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2). A un qualunque tempo t viene eseguita una misura di energia sul sistema. Determinare i risultati possibili di questa misura e le rispettive probabilità.

(6) Supporre ora che a partire dal tempo $t = T$ l'evoluzione temporale sia data dalla nuova hamiltoniana

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x + x_0)^2, \quad t \geq T. \quad (3)$$

Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori posizione e impulso per $t \geq T$.

(7) *Domanda di teoria:* Scrivere e risolvere le equazioni di evoluzione alla Heisenberg per l'operatore di creazione alla Heisenberg a_H^\dagger . Determinare l'elemento di matrice a qualunque tempo t tra due stati generici di oscillatore armonico $\langle i|a_H^\dagger(t)|j\rangle$.

Suggerimento: ricordare il suggerimento dato alla domanda 3.

(8) Determinare il valor medio della posizione a un tempo $t > T$ per un sistema preparato nello stato fondamentale dell'hamiltoniana H Eq. (1) al tempo $t = T$, ma la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H' Eq. (3).

Suggerimento: Utilizzare la rappresentazione di Heisenberg per esprimere l'operatore posizione al tempo t in termini dell'operatore posizione al tempo $t = T$.

(9) Determinare la trasformazione unitaria che collega gli autostati di H Eq. (1) a quelli della hamiltoniana H' Eq. (3) e determinare la relazione fra i rispettivi autovalori.

(10) Dimostrare che lo stato fondamentale della hamiltoniana H' Eq. (3) è autostato dell'operatore di distruzione a relativo allo spettro della hamiltoniana H Eq. (1).

(11) Dimostrare che per un sistema preparato nello stato fondamentale dell'hamiltoniana H Eq. (1) ma la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H' Eq. (3), l'indeterminazione in posizione non dipende dal tempo.

Suggerimento: Sfruttare il risultato della domanda (9).