PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

20 giugno 2022

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella di massa m vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza L, cioè soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } |x| > L \\ 0 & \text{se } |x| \le L, \end{cases} \tag{1}$$

con $V_0 \to \infty$.

(1) Sono a disposizione molte copie del sistema, tutte preparate nello stesso stato $|\phi\rangle$. Su ciascuna di esse viene eseguita una misura di energia. In due terzi dei casi si trova che l'energia del sistema è $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$, mentre in un terzo dei casi si trova $E' = \frac{4\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$. Qual è la più generale forma della funzione d'onda $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ compatibile con questo risultato? La funzione d'onda può anche dipendere da parametri inosservabili, e se sì quali sono?

(2) Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle. \tag{2}$$

Discutere se la funzione d'onda $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ per questo stato sia uguale o diversa dalla funzione d'onda $\phi(x)$ determinata al punto precedente. Calcolare il valor medio della Hamiltoniana nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2).

(3) Determinare il valore medio dell'operatore x nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2).

(4) Determinare il valore medio dell'operatore p nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2). *Suggerimento:* Ricordare gli integrali

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^{L} x \sin\frac{x\pi}{L}\cos\frac{x\pi}{2L}\,dx = \frac{32L^2}{9\pi^2} \\ &\int_{-L}^{L} \sin\frac{x\pi}{L}\sin\frac{x\pi}{2L}\,dx = 2\int_{-L}^{L}\cos\frac{x\pi}{L}\cos\frac{x\pi}{2L}\,dx = \frac{8L}{3\pi} \end{aligned} \tag{3}$$

(5) Considerare ora un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2) e supporre che su di esso venga eseguita una misura di energia al tempo $t = 0$. Determinare il valor medio degli operatori x e p dopo la misura di energia, cioè determinare tale valor medio a tutti i tempi $t > 0$, e per tutti i possibili risultati della misura.

(6) *Domanda di teoria:* Ricavare la forma delle autofunzioni della Hamiltoniana per un sistema soggetto al potenziale Eq. (1), discutendo in particolare il ruolo delle condizioni al contorno.

(7) Supporre ora che su un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2) al tempo $t = 0$ *non* venga eseguita alcuna misura di energia: determinare in tal caso il valore medio dell'operatore p ad ogni tempo t.

(8) Scrivere le equazioni del moto alla Heiseinberg soddisfatte dagli operatori posizione, impulso, energia cinetica ed energia potenziale in presenza del potenziale Eq. (1). (La risoluzione delle equazioni non è richiesta).

(9) Supporre ora che il potenziale sia dato da

$$V'(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } |x| > 2L \\ 0 & \text{se } |x| \le 2L, \end{cases} \tag{4}$$

sempre con $V_0 \to \infty$. Confrontare lo spettro di energia in presenza del potenziale $V(x)$ Eq. (1) e del potenziale $V'(x)$ Eq. (4). Indicare se vi siano autovalori di energia comuni ai due casi, e se ci siano autofunzioni di energia comuni ai due casi (a meno della normalizzazione), ed indicare quali.

(10) Dimostrare l'identità nel senso delle distribuzioni per la Theta di Heaviside

$$\Theta(x - \lambda a) = \Theta\left(\frac{x}{\lambda} - a\right). \tag{5}$$

Suggerimento: Studiare l'azione su una funzione di prova sotto integrazione.

(11) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare la trasformazione unitaria che trasforma il potenziale $V(x)$ Eq. (1) nel potenziale $V'(x)$ Eq. (4) in termini di un opportuno generatore hermitiano D e di un opportuno parametro λ

$$V'(x) = e^{-i\lambda D}V(x)e^{i\lambda D} \tag{6}$$

Determinare l'effetto di questa trasformazione sulla Hamiltoniana completa.