PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

22 luglio 2022

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = N\left[(1+i)|0\rangle + 2|1\rangle - i|2\rangle\right], \tag{2}$$

dove $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, sono rispettivamente lo stato fondamentale, ed il primo ed il secondo stato eccitato dell'hamiltoniana Eq. (1), ed N è una costante di normalizzazione.
Suggerimento: Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{3}$$

(1) Determinare la costante di normalizzazione N dello stato Eq. (2). La costante di normalizzazione deve necessariamente essere reale positiva?
(2) Determinare i possibili risultati di una misura di energia per un sistema preparato nello stato Eq. (2), le loro probabilità, e lo stato in cui il sistema si trova dopo la misura.
(3) Si supponga di poter effettuare sul sistema descritto dal vettore di stato Eq. (2) una misura di energia con un apparato che permette esclusivamente di determinare se l'energia assume un certo valore $E = E'$, oppure un valore diverso; E' è dato da

$$E' = \frac{3}{2}\hbar\omega. \tag{4}$$

Determinare i valori medi degli operatori x e p nello stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura nel caso in cui la misura dà il valore $E = E'$.
(4) Determinare ora i valori medi degli operatori x e p nello stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura nel caso in cui la misura dà il valore $E \neq E'$.
(5) Determinare il valor medio dell'operatore x nello stato Eq. (2) (nel caso in cui non viene preventivamente eseguita alcuna misura di energia o altro).
(6) *Domanda di teoria:* Determinare la funzione d'onda nella base delle coordinate dello stato fondamentale e del primo stato eccitato della hamiltoniana Eq. (1).
(7) Determinare l'indeterminazione per una misura di posizione nello stato dato dalla Eq. (2).
(8) Determinare a tutti i tempi t il valor medio dell'operatore di distruzione Eq. (3) nello stato dato dalla Eq. (2). Utilizzare la rappresentazione di Heisenberg.
(9) Supporre che un sistema si trovi nello stato avente funzione d'onda

$$\phi(x) = \left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{x^2 m\omega'}{2\hbar}\right], \tag{5}$$

dove $\omega' = 2\omega$. Determinare la probabilità che questo sistema sia rivelato nello stato fondamentale della Hamiltoniana Eq. (1).
(10) Determinare in quali dei possibili autostati di energia della Hamiltoniana Eq. (1) può essere rivelato un sistema preparato nello stato avente funzione d'onda Eq. (5).
(11) Determinare la funzione d'onda al tempo $t = \frac{\pi}{\omega}$ per uno stato preparato al tempo $t = 0$ nello stato dato dalla Eq. (5), e la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana Eq. (1).