PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

23 settembre 2020

Tempo massimo 3 ore. Libri o appunti possono essere consultati liberamente

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Considerare i seguenti stati del sistema:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|0\rangle + (1+i)|1\rangle\right], \tag{2}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|0\rangle + |2\rangle\right], \tag{3}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|3\rangle, \tag{4}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|2\rangle + |3\rangle\right]. \tag{5}$$

In tutte le successive domande $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$ indicano questi stati.

(1) Determinare il valor medio della posizione in ciascuno dei quattro stati $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$.

(2) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = N\left[|\psi_1\rangle + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\right]. \tag{6}$$

Determinare la costante di normalizzazione N. Determinare inoltre la probabilità che una misura di energia sul sistema fornisca il risultato $E = \frac{\hbar}{2}\omega$.

(3) Supporre che su un sistema che si trova nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (6) venga eseguita una prima misura che rivela che si trova nello stato $|\psi_2\rangle$. Qual è la probabilità di trovare questo risultato? Qual è probabilità che una successiva misura di energia sul sistema fornisca il risultato $E = \frac{\hbar}{2}\omega$?

(4) Determinare il valor medio della posizione ad ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ è preparato nello stato $|\psi_1\rangle$ oppure nello stato $|\psi_2\rangle$.

(5) Supporre ora che per tutti i tempi $t \leq 0$ la hamiltoniana sia data dalla Eq. (1), ma per ogni tempo $t > 0$ la hamiltoniana sia data da

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2. \tag{7}$$

Determinare il valor medio della posizione per ogni tempo t per un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi_1\rangle$.

(6) *Domanda di teoria:* Determinare la funzione d'onda $\varphi_2(x) = \langle x|2\rangle$ nella base delle posizioni per il secondo stato eccitato della hamiltoniana Eq. (1). La normalizzazione non è richiesta.

(7) Determinare la funzione d'onda nella base delle posizioni per lo stato

$$\chi(x) = \langle x| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\delta\hat{p}\right)|\psi_2\rangle \qquad (8),$$

dove δ è una costante reale e $\hat{p}$ è l'operatore impulso.

(8) Determinare l'indeterminazione in posizione $\Delta^2 x$ ad ogni tempo $t \geq 0$ per un sistema la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana Eq. (1) e che al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$|\bar{\chi}\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\delta\hat{p}\right)|0\rangle \qquad (9).$$