PROVA IN ITINERE DI FISICA QUANTISTICA

19 settembre 2022

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{1}$$

dove x e p sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = N\left(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}\right) e^{-\lambda x^2}, \tag{2}$$

dove λ è una costante reale positiva.

(1) Determinare il valor medio di una misura di posizione al tempo $t = 0$.
(2) Determinare il valor medio di una misura di impulso al tempo $t = 0$.
(3) Scrivere e risolvere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x e p per il sistema dato.
(4) Determinare i valori medi per una misura di posizione ed impulso a tutti i tempi t.
(5) Considerare il caso in cui $\lambda = 0$ e supporre che al tempo $t = 0$ venga eseguita una misura di impulso. Determinare i possibili risultati di questa misura e le loro probabilità, e determinare nuovamente i valori medi per una successiva misura di impulso a tutti i tempi t. Quali sono i valori dell'indeterminazione in posizione ed impulso al tempo $t = 0$ subito dopo la misura?
(6) *Domanda di teoria:* Ricavare le leggi del moto alla Heisenberg per un operatore in rappresentazione di Heisenberg a partire dall'evoluzione temporale in rappresentazione di Schrödinger.
(7) Determinare la funzione d'onda del sistema al tempo $t = 0$ nella base degli impulsi. Discutere se la funzione d'onda sia normalizzazbile in senso proprio o improprio e determinare la costante di normalizzazione.
(8) Determinare l'indeterminazione di una misura di posizione per il sistema dato ad ogni tempo t in funzione dell'indeterminazione in posizione ed impulso al tempo $t = 0$.
Suggerimento: osservare che

$$\langle\psi|\big(x - \langle x\rangle\big)\big(p - \langle p\rangle\big) + \big(p - \langle p\rangle\big)\big(x - \langle x\rangle\big)|\psi\rangle = 0.$$

(9) Determinare le autofunzioni $\psi_E(p)$ della Hamiltoniana data nella base degli impulsi. Discutere se le autofunzioni siano normalizzazbili in senso proprio o improprio e determinare la costante di normalizzazione.
(10) Determinare se l'operatore

$$D = xp + px \tag{3}$$

sia conservato o meno e discutere se la sua conservazione sia legata ad una simmetria.
(11) Considerare lo stato $|\psi'\rangle = e^{i\lambda D}|\psi\rangle$, dove $|\psi\rangle$ è lo stato avente funzione d'onda Eq. (2) e D è dato dalla Eq (3). Determinare l'indeterminazione in posizione nello stato $|\psi'\rangle$ al tempo $t = 0$.