ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

26 gennaio 2021

Tempo massimo 3 ore. Libri ed appunti possono essere consultati liberamente.

Considerare un sistema di due particelle in una dimensione la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \omega \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right) + \lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right) + \mu \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{1}$$

dove gli operatori $a_i^\dagger$, a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}; \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0,$$

a_1, $a_1^\dagger$ sono operatori che agiscono sullo spazio degli stati fisici della prima particella, a_2, $a_2^\dagger$ su quello della seconda particella, ed $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ sono operatori di spin per la prima e la seconda particella rispettivamente.

(1) Nel caso $\lambda = \mu = 0$, separare la hamiltoniana nella somma di due hamiltoniane di particella singola H_1 ed H_2 e determinare lo spettro della hamiltoniana H in termini dello spettro di queste hamiltoniane H_1, H_2, supponendo che le due particelle non siano identiche.

(2) Determinare la degenerazione di ogni autovalore di H trovato nella domanda precedente, nei due casi in cui le due particelle hanno entrambe spin $\frac{1}{2}$, oppure entrambe spin 1, includendo la degenerazione di spin.

(3) Determinare nuovamente lo spettro di H per particelle non identiche, supponendo sempre $\lambda = 0$, ma ora $\mu \neq 0$, sempre sia nel caso di spin $\frac{1}{2}$ che nel caso di spin 1.

(4) Determinare la degenerazione di ogni autovalore di H trovato nella domanda precedente, sempre includendo la degenerazione di spin.

(5) Sempre nel caso $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ determinare il valore dell'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati di H, per particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ oppure di spin 1, supponendo $\omega \gg |\mu|\hbar^2$. Per ciascuno di questi stati, scrivere il ket di stato in termini dei ket corrispondenti agli autostati delle hamiltoniane di particella singola H_1, H_2 della domanda (1) (non è necessario farlo anche per la parte di spin).
Suggerimento: Ricordare che, nella composizione di due spin 1, la simmetria degli stati è $(-1)^S$, dove S è il valore dello spin totale.

(6) *Domanda di teoria:* Comporre tre spin 1: determinare i valori possibili per lo spin totale e per la terza componente dello spin totale e contare (enumerare) il numero di stati associati ad ogni combinazione.

(7) Supporre ora $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$, particelle non identiche. Trattando il termine proporzionale a λ come una perturbazione, determinare al primo ordine non-banale la correzione al primo livello eccitato della hamiltoniana imperturbata. Discutere l'effetto della perturbazione sulla degenerazione.

(8) Nelle stesse condizioni della domanda precedente determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana H. Confrontare con il risultato perturbativo.

(9) Nelle condizioni della domanda precedente, suppore che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato $|\psi\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale della hamiltoniana totale H. Determinare la probabilità che al tempo $t = T$ il sistema venga rivelato nello stato $|\phi\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$.