ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

25 gennaio 2022

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\kappa}{2I}(\vec{L})^2 + \hbar\vec{B}\cdot\vec{L} \qquad (1),$$

dove $\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$ sono gli operatori di momento angolare, I e κ sono costanti reali positive, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(1) Determinare lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana Eq. (1) nel caso in cui $\vec{B} = 0$.

(2) Determinare la degenerazione dello spettro trovato al punto precedente.

(3) Determinare di nuovo lo spettro e la degenerazione, ma ora nel caso $\vec{B} \neq 0$.

(4) Scrivere le equazioni di Heisenberg per l'operatore $\vec{L}$.

(5) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$, ma supponendo ora $\kappa = 0$.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che l'operatore di momento angolare $\vec{L}$ genera le rotazioni dell'operatore posizione $\vec{x}$

(7) Si consideri ora la hamiltoniana H_0 Eq. (1) con $\vec{B} \neq 0$ e diretto lungo l'asse z come hamiltoniana imperturbata, e, come perturbazione, il potenziale

$$V = \epsilon\hbar\vec{A}\cdot\vec{L} \qquad (3)$$

dove $\vec{A}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali diretto lungo l'asse x. Determinare al primo ordine l'effetto della perturbazione Eq. (3) su tutti i livelli energetici della hamiltoniana imperturbata H_0.

(8) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{L} \qquad (2)$$

dove H_0 è la hamiltoniana Eq. (1) con $\vec{B} = 0$ e $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli. Determinare lo spettro della Hamiltoniana H e la sua degenerazione.

(9) Nelle stesse condizioni della domanda (7), determinare ora al secondo ordine l'effetto della perturbazione Eq. (3) sull' energia del primo stato eccitato della hamiltoniana imperturbata H_0.

(10) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato sovrapposizione equiprobabile del primo e del secondo livello eccitato della hamiltoniana H_0 (con $\vec{B} \neq 0$). Determinare la probabilità che al tempo t esso si trovi nella sovrapposizione degli stessi due stati ortogonale a quella in cui si trova al tempo $t = 0$.

(11) Si consideri di nuovo la situazione della domanda (8), con hamiltoniana data da H Eq. (2), ma ora con $\vec{B} \neq 0$. In tal caso è possibile determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana? Se sì, si determini questo spettro, e se no lo si determini perturbativamente al primo ordine trattando il termine proporzionale a $\vec{\sigma}$ come perturbazione.