ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

27 gennaio 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema di due particelle (non identiche) in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \vec{E}, \tag{1}$$

dove $\vec{p}_i$ ed $\vec{x}_i$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione per le due particelle ed $\vec{E}$ è un vettore a componenti reali.

(1) Determinare un cambio di variabili opportuno che separari la hamiltoniana Eq. (1) nella somma di due hamiltoniane commutanti.

(2) Determinare le relazioni di commutazione fra le nuove variabili canoniche in termini delle quali la hamiltoniana è stata separata.

(3) Determinare lo spettro della hamiltoniana sfruttando il risultato delle domande precedenti, nel caso in cui $\vec{E} = 0$. Discutere se lo spettro della hamiltoniana baricentrale e della hamiltoniana relativa siano discreti o continui. Determinare la degenerazione dello spettro della hamiltoniana relativa.

(4) Scrivere le equazioni di Heisenberg soddisfatte dagli operatori canonici posizione e impulso nelle nuove variabili (la soluzione delle equazioni non è richiesta), nel caso generale in cui $\vec{E} \neq 0$.

(5) Determinare la funzione d'onda per lo stato fondamentale del sistema complessivo nel caso in cui $\vec{E} = 0$.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che la dipendenza dai parametri dello spettro della hamiltoniana di atomo di idrogeno è interamente fissata da considerazioni di natura dimensionale e determinare questa dipendenza attraverso un'opportuna ridefinizione delle variabili.

(7) Determinare il valore medio dell'operatore $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ nello stato determinato al punto (5). Questo valor medio cambia se $\vec{E} \neq 0$?

(8) Supporre ora che le due particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$ e che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \frac{B}{\hbar^2} \vec{L} \cdot \vec{S}^{\text{tot}} + \frac{\lambda}{\hbar^2} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{2}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo delle due particelle, $\vec{s}_1$ e $\vec{s}_2$ sono i loro rispettivi spin, e $\vec{S}^{\text{tot}}$ è l'operatore spin totale,e B e λ sono costanti reali positive. Determinare nuovamente lo spettro della hamiltoniana nel caso $\vec{E} = 0$, indicando esplicitamente i numeri quantici dai quali gli autostati di energia dipendono, i valori che essi possono assumere, e la dipendenza o mancanza di dipendenza dell'autovalore di energia da tutti i numeri quantici.

(9) Considerare ora il caso in cui il sistema soggetto alla hamiltoniana H Eq. (2) con $B = 0$ è soggetto ad una perturbazione che agisce solo sulla funzione d'onda di spin, della forma

$$M_p = \frac{\vec{\kappa}}{\hbar} \cdot \vec{\sigma}_1. \tag{3}$$

Determinare al primo ordine la correzione perturbativa ai livelli energetici della hamiltoniana di spin dovuta a questa perturbazione.

(10) Al tempo $t = 0$ viene eseguita sul sistema una misura dello spin totale lungo l'asse z, che lo rivela in uno stato avente $S^{\text{tot}} = 1$, $S_z^{\text{tot}} = 0$. Per tutti i tempi successivi, il sistema evolve con una hamiltoniana di spin data da M_p Eq. (3). Determinare la probabilità che il sistema venga rivelato nello stesso stato di spin ad un tempo successivo T. Eseguire il calcolo supponendo $\vec{\kappa}$ diretto lungo l'asse z e discutere se il risultato cambi qualora $\vec{\kappa}$ sia diretto lungo un altro asse.

(11) Determinare la degenerazione dello spettro trovato alla domanda (8) (per valori generici e incommensurabili di tutti i parametri).