ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

24 febbraio 2021

Tempo massimo 3 ore. Libri ed appunti possono essere consultati liberamente.

Considerare un sistema ("positronio") di due particelle non identiche di spin 1/2 in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_{tot} = H_1 + H_2; \tag{1}$$

$$H_1 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \qquad H_2 = -\frac{A}{\hbar^2}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \tag{2}$$

dove $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ sono rispettivamente gli operatori (vettoriali) posizione, impulso e spin per le due particelle e A ed e sono costanti reali positive.

Considerare inoltre i quattro operatori (hermitiani):

$$H_3 = \frac{1}{\hbar^2}\lambda s_1^z; \qquad H_4 = \frac{1}{\hbar^2}\lambda s_2^z \tag{3}$$

$$H_5 = \frac{1}{\hbar^2}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 - \vec{s}_2); \qquad H_6 = \frac{1}{\hbar^2}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)\, e^{i\omega t}. \tag{4}$$

dove s_1^z, s_2^z sono gli operatori terza componente dello spin per le due particelle, $\vec{B}$ è un vettore reale, λ e ω sono costanti reali positive.

(1) Separare la hamiltoniana H_1 in una hamiltoniana libera ed una hamiltoniana relativa.
(2) Determinare lo spettro di energia della hamiltoniana relativa trovata al punto precedente, e la sua degenerazione. Notare che si tratta di una hamiltoniana puramente spaziale senza parte di spin.
(3) Determinare lo spettro della hamiltoniana H_{tot} Eq. (1) e la sua degenerazione, supponendo che la spaziatura dei livelli della hamiltoniana H_2 sia più fine di quella dei livelli della hamiltoniana H_1. Notare che si tratta di una hamiltoniana che include sia una parte spaziale che una parte di spin.
(4) *Domanda di teoria:* Considerare la trasformazione (parità) $P|\vec{x}_1\rangle = |-\vec{x}_1\rangle$, $P|\vec{x}_2\rangle = |-\vec{x}_2\rangle$. Determinare l'effetto di questa trasformazione su tutte le autofunzioni della hamiltoniana H_1, ossia determinare la funzione $\psi_P(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2|P|\psi\rangle$.
(5) Determinare il valor medio della separazione fra le due particelle e il valor medio dell'energia potenziale nello stato fondamentale della hamiltoniana H_1.
(6) Determinare lo spettro della hamiltoniana $H_{tot} + H_3$, nelle ipotesi della domanda (3), supponendo $\lambda \ll A$ e trattando H_3 al primo ordine in teoria delle perturbazioni.
(7) Determinare il valor medio dell'energia cinetica nello stato fondamentale della hamiltoniana H_1.
(8) Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'operatore H_3 che dà come risultato $s_{1,z} = +\frac{\hbar}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo $t = T$ una misura sempre di H_3 dia come risultato $s_{1,z} = -\frac{\hbar}{2}$, supponendo che l'evoluzione temporale del sistema sia data dalla hamiltoniana $H_1 + H_5$ e che il vettore $\vec{B}$ sia diretto lungo l'asse x.
(9) Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'operatore H_3 che dà come risultato $s_{1,z} = +\frac{\hbar}{2}$. Viene inoltre misurato anche l'operatore H_4: considerare i due casi in cui la misura di questo secondo operatore dà (a) $s_{2,z} = +\frac{\hbar}{2}$ oppure (b) $s_{2,z} = -\frac{\hbar}{2}$. Determinare, nei due casi (a) e (b), la probabilità che al tempo $t = T$ la misura di H_3 dia come risultato $s_{1,z} = -\frac{\hbar}{2}$, supponendo che l'evoluzione temporale del sistema sia data dalla hamiltoniana H_{tot} Eq. (1).
(10) Supporre ora che l'evoluzione temporale del sistema sia data dalla hamiltoniana $H_{tot} + H_6$. Calcolare la probabilità di transizione tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato della hamiltoniana H_{tot} trattando H_6 come una perturbazione al primo ordine. Nel caso in cui il primo livello eccitato dovesse rivelarsi degenere, determinare il risultato per tutti gli stati degeneri associati a questo livello energetico.
(11) Determinare nuovamente lo spettro della hamiltoniana H_{tot}, che era stato determinato al punto (3) nel caso di particelle non identiche, ma supponendo ora invece che le due particelle siano identiche. Calcolare la degenerazione per livelli energetici per cui il numero quantico principale n è dispari.