ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

16 febbraio 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una coppia di particelle non identiche in **due** dimensioni aventi la stessa massa m la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{1}{4}m\omega_1^2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)^2 + \frac{1}{4}m\omega_2^2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2, \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle, e ω_i sono costanti reali positive.

(1) Dimostrare che la hamiltoniana data si separa in termini delle coordinate baricentrali e relative delle due particelle, e scrivere la hamiltoniana in termini di queste coordinate.

(2) Determinare le equazioni del moto di Heisenberg per le coordinate baricentrale e relativa e i corrispondenti impulsi (la soluzione delle equazioni non è richiesta).

(3) Determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana, sfruttando il risultato della prima domanda.

(4) Sempre sfruttando il risultato della prima domanda, determinare la funzione d'onda di stato fondamentale per la hamiltoniana data.

(5) Considerare ora il caso in cui $\omega_1 = 0$. Determinare nuovamente la funzione d'onda di stato fondamentale per la hamiltoniana data e in particolare discutere la sua normalizzazione.

(6) *Domanda di teoria*: considerare una trasformazione lineare delle coordinate per un sistema di più corpi in più dimensioni e determinare la legge di trasformazione degli impulsi che preserva le relazioni di commutazione canoniche.

(7) Determinare la degenerazione dello spettro della hamiltoniana relativa.

(8) Supporre ora che le due particelle abbiano spin 1 e che la hamiltoniana totale sia data da

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{\hbar^2}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{2}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Determinare nuovamente lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa, includendo ora anche il contributo dello spin.

(9) Il sistema dato è soggetto ad un campo elettrico che si smorza esponenzialmente nel tempo, il cui contributo al potenziale è

$$V_E = \vec{E} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{3}$$

dove $\vec{E}$ è un vettore a componenti reali diretto lungo l'asse x, e τ è una costante reale positiva. Determinare al primo ordine nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo la probabilità che il sistema, preparato in un qualunque autostato n della hamiltoniana relativa al tempo $t = 0$, subisca una transizione ad un altro autostato $m \neq n$ in un tempo $t \to \infty$. Discutere per quali valori di n e m l'approssimazione perturbativa sia buona.

(10) Supporre che $\omega_1 = \omega_2$, e che le particelle siano non identiche e senza spin. Determinare lo spettro della hamiltoniana e la sua degenerazione in questo caso.
Suggerimento: ricordare che $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(11) Supporre ora che le particelle siano identiche e che abbiano spin $s = 0$. Determinare lo spettro della hamiltoniana complessiva e la sua degenerazione in questo caso, separando il problema in termini di hamiltoniane unidimensionali e supponendo che ω_1 e ω_2 siano incommensurabili.