ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

23 giugno 2021

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema tridimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}))^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \tag{1}$$

dove $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono gli operatori posizione e impulso, $r = |\vec{x}|$, e $\vec{A}(\vec{x})$ (potenziale vettore) è un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(1) Definire l'operatore (vettoriale)

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right) \tag{2}$$

e calcolare il commutatore fra ciascuna delle sue componenti e le componenti dell'operatore posizione: $[v^i, x^j]$.

(2) Calcolare il commutatore fra due componenti qualunque dell'operatore v^i Eq. (2): $[v^i, v^j]$.

(3) Scrivere l'equazione del moto di Heisenberg per l'operatore posizione $\vec{x}$. La risoluzione dell'equazione non è richiesta.

(4) Suppore che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Mostrare che la hamiltoniana può essere scritta in termini degli operatori $x_1^2 + x_2^2$, $p_1^2 + p_2^2$, p_3^2, L_3 e r, dove x_i e p_i sono componenti di $\vec{x}$ e $\vec{p}$ rispettivamente e L_3 è la terza componente dell'operatore momento angolare orbitale e determinarne l'espressione in termini di questi operatori.

(5) Nel caso $e = 0$, dimostrare che la hamiltoniana trovata al punto precedente è separabile in una parte che dipende solo dalle coordinate x_1 e x_2 ed una parte che dipende solo dalla coordinata x_3 (ed i rispettivi impulsi) e determinarne lo spettro.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che, se una hamiltoniana è separabile, i suoi autovalori sono la somma degli autovalori, e le autofunzioni il prodotto delle autofunzioni, della hamiltoniane in cui viene separata.

(7) Facendo riferimento al punto (5), determinare (a) la degenerazione dello spettro della hamiltoniana dipendente solo da x_1 e x_2 e (b) la degenerazione dello spettro della hamiltoniana complessiva.

(8) Considerare ora il caso in cui $e \neq 0$ e $\vec{A}(\vec{x})$ è sempre dato dalla Eq. (3). Determinare lo spettro dalla hamiltoniana trattando $\vec{A}(\vec{x})$ come una perturbazione, al primo ordine in B.

(9) Dimostrare che due hamiltoniane della forma Eq. (1) aventi due diversi potenziali vettori $\vec{A}_1(\vec{x})$, ed $\vec{A}_2(\vec{x})$ tali che

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \vec{A}_2(\vec{x}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}) \tag{4}$$

sono unitariamente equivalenti; $\Lambda(\vec{x})$ è una qualunque funzione dell'operatore posizione.
Suggerimento: che cosa succede se si moltiplica un'autofunzione $\psi(\vec{x})$ della hamiltoniana Eq. (1) per un fattore $e^{i\phi(\vec{x})}$, dove $\phi(\vec{x})$ è una funzione qualunque delle coordinate?

(10) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare lo spettro della hamiltoniana Eq. (1) se $\vec{A}(\vec{x})$ è dato da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(11) Determinare la degenerazione dello spettro trovato al punto (8).