ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

22 giugno 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una sistema di tre particelle non identiche in una dimensione aventi la stessa massa m, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_3^2 + \lambda x_2, \tag{1}$$

dove x_i e p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle tre particelle, e ω e λ sono costanti reali positive.

(1) Determinare lo spettro della hamiltoniana data nel caso $\lambda = 0$.

(2) Determinare la degenerazione dello spettro trovato al punto precedente.

(3) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale per la hamiltoniana data sempre nel caso $\lambda = 0$.

(4) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x_i e p_i in presenza della hamiltoniana Eq. (1) nel caso generale in cui $\lambda \neq 0$.

(5) Risolvere le equazione di Heisenberg trovate al punto precedente nel caso $\lambda = 0$.

(6) *Domanda di teoria*: Dimostrare che gli operatori di spin per un sistema di spin $\frac{1}{2}$ sono proporzionali alle matrici di Pauli.

(7) Supporre ora che le tre particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$ e la loro hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + H_s \tag{2}$$

$$H_s = -\mu\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3\right), \tag{3}$$

dove H_0 è data dalla Eq. (1), μ è una costante reale positiva e $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin per le tre particelle. Determinare lo spettro della hamiltoniana H (la degenerazione non è richiesta), nel caso in cui $\lambda = 0$.

(8) Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana H_0 nel caso $\lambda \neq 0$. Determinare i valori medi degli operatori x_i e p_i in qualunque autostato della hamiltoniana. Determinare infine l'operatore $\mathcal{O}_\lambda$ tale che $\mathcal{O}_\lambda|0_0\rangle = |0_\lambda\rangle$, dove $|0_0\rangle$ e $|0_\lambda\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (1) quando $\lambda = 0$ e quando $\lambda \neq 0$.

(9) Considerare nuovamente la hamiltoniana H_0 nel caso $\lambda \neq 0$, ma trattando ora il termine proporzionale a λ come una perturbazione. Determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo. Confrontare con il risultato esatto.

(10) Determinare la degenerazione dello spettro della hamiltoniana H Eqs. (2-3) nel caso $\lambda = 0$, e determinare esplicitamente la funzione d'onda (o le funzioni d'onda) dello stato fondamentale, sempre nel caso di particelle non identiche come per tutte le domande precedenti. Nel caso di particelle identiche determinare invece per lo stato fondamentale l'energia della parte spaziale e l'autovalore della terza componente dello spin totale $s^z_{\text{tot}} = s^z_1 + s^z_2 + s^z_3$ nel caso in cui $\omega \gg \mu$.
Suggerimento: ricordare che tutti gli stati aventi lo stesso valore dello spin totale hanno la stessa simmetria sotto scambio.

(11) Considerare la trasformazione di coordinate

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + x_2\right) \tag{4}$$

$$x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 - x_2\right) \tag{5}$$

$$x'_3 = x_3. \tag{6}$$

Determinare l'operatore $\mathcal{R}$ tale che $\mathcal{R}|x_1x_2x_3\rangle = |x'_1x'_2x'_3\rangle$ dove $|x_1x_2x_3\rangle$ e $|x'_1x'_2x'_3\rangle$ sono autostati simultanei dei tre operatori posizione $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_3$ aventi autovalori rispettivamente dati dal membro destro e dal membro sinistro delle Eq. (4-6).