ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

19 luglio 2021

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ e di uguale massa m in tre dimensioni, confinate all'interno di un parallelepipedo. Le particelle sono da considerarsi in generale non identiche. La dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + V(\vec{x}_3) - \frac{\lambda}{\hbar^2}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \frac{1}{\hbar}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) - \frac{\mu}{\hbar^2}(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1) \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le tre particelle, μ e λ sono costanti reali positive e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali. Il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq a \\ \infty \text{ se } |x_i^{(j)}| > a \end{cases}, \tag{2}$$

dove $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella ed a è una costante reale positiva.

(1) Determinare lo spettro di autovalori di energia della hamiltoniana Eq. (1) nel caso $\mu = \lambda = 0$, $B_j = 0$ per ogni j.

(2) Determinare le autofunzioni della hamiltoniana Eq. (1) nel caso della domanda (1).

(3) Determinare la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato della hamiltoniana Eq. (1) nel caso della domanda (1).

(4) Determinare lo spettro di autovalori di energia della hamiltoniana Eq. (1) nel caso $\lambda \neq 0$, ma $\mu = 0$, $B_j = 0$ per ogni j.

(5) Determinare come cambia la degenerazione calcolata al punto (3) nel caso in cui $\lambda \neq 0$.

(6) *Domanda di teoria*: Dimostrare che se si compongono due momenti angolari $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ i coefficienti di Clebsch-Gordan sono diversi da zero solo quando la terza componente del momento angolare totale $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ soddisfa la condizione $L^z_{\text{tot}} = L^z_1 + L^z_2$.

(7) Determinare le equazioni di Heisenberg per l'operatore $\vec{s}_1$ nel caso più generale in cui λ, μ e $\vec{B}$ sono tutti diversi da zero (la soluzione delle equazioni non è richiesta).

(8) Considerare la hamiltoniana della domanda 4 (cioè $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ e $B_j = 0$ per ogni j) come hamiltoniana imperturbata. Supporre ora che $\vec{B} \neq 0$, e trattare il termine proporzionale a $\vec{B}$ come perturbazione. Determinare al primo ordine perturbativo la correzione allo spettro determinato alla domanda 4 e discutere l'effetto della perturbazione sulla degenerazione.

(9) Determinare lo spettro della hamiltoniana Eq. (1) nel caso in cui $B_j = 0$ per ogni j ma $\lambda = \mu \neq 0$. Determinare inoltre come cambia la degenerazione calcolata al punto (3) nel presente caso in cui $\lambda = \mu \neq 0$

(10) Supporre ora che le particelle siano identiche. Nel caso della domanda precedente, determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale dell'hamiltoniana supponendo che $\lambda \gg \frac{1}{ma^2}$.

(11) Sempre nel caso della domanda (9), qual è l'energia dello stato fondamentale se invece $\lambda \ll \frac{1}{ma^2}$?