ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

25 luglio 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)\right]^2, \tag{1}$$

dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli, $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono gli operatori (vettoriali) posizione e impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ è un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(1) Considerare inizialmente il caso in cui $\vec{A}(\vec{x}) = 0$. Determinare, usando la rappresentazione di Heisenberg, $\frac{d}{dt}\vec{p}$.

(2) Determinare, nel caso della domanda precedente, $v^i \equiv \frac{d}{dt}x^i$.

(3) Supporre ora che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

dove B è una costante reale positiva, e x_i è la componente dell'operatore $\vec{x}$ lungo l'i–esimo asse cartesiano. Determinare nuovamente $\frac{d}{dt}\vec{p}$.

(4) Dimostrare che

$$\left[v^i, \sigma^j\right] = 0, \tag{3}$$

dove v^i sono gli operatori determinati alla domanda (2) (dunque con $\vec{A}(\vec{x}) = 0$) e σ^i sono sempre le matrici di Pauli. *Suggerimento:* ricordare che le matrici di Pauli soddisfano l'identità

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}. \tag{4}$$

(5) Calcolare i commutatori $[v^i, v^j]$, $[v^i, x^j]$, $[v^i, p^j]$, dove v^i sono gli operatori determinati alla domanda (2).

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che i generatori delle rotazioni nello spazio tridimensionale sono proporzionali agli operatori di spin 1.

(7) Dimostrare che, con $\vec{A}(\vec{x})$ dato dalla Eq. (2), la hamiltoniana Eq. (1) può essere separata nella somma di una hamiltoniana spaziale $H_x = \frac{m}{2}v^iv^i$ e una hamiltoniana di spin $H_\sigma = -\frac{\hbar B}{2m}\sigma_3$, dove $v^i \equiv \frac{d}{dt}x^i$ ma ora $\vec{A}(\vec{x})$ non si annulla. *Suggerimento:* usare l'identità soddisfatta dalle matrici di Pauli

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma^k \tag{5}$$

(8) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana unidimensionale

$$H_1 \equiv \langle k_2k_3|H_x|k_2k_3\rangle, \tag{6}$$

dove H_x è la hamiltoniana spaziale determinata al punto precedente, e dove $|k_2k_3\rangle$ è un autostato simultaneo di p_2 e p_3.

(9) Aggiungere alla hamiltoniana del punto (7) una perturbazione della forma

$$H' = \epsilon B'\sigma_1, \tag{7}$$

dove $\epsilon B'$ è una costante reale positiva e σ_1 è la prima matrice di Pauli. Determinare la perturbazione fino al secondo ordine agli autostati della hamiltoniana di spin H_σ determinata al punto (7).

(10) Sfruttando il risultato della domanda (8), determinare spettro e degenerazione della hamiltoniana H Eq. (1) con $\vec{A}(\vec{x})$ dato dalla Eq. (2).

(11) Aggiungere al potenziale Eq. (2) una perturbazione della forma

$$\vec{A}^\epsilon(\vec{x}) = \epsilon B''\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

dove $\epsilon B''$ è una costante reale positiva. Determinare fino al secondo ordine perturbativo la correzione agli autostati della hamiltoniana di spin H_σ dovuta a tale perturbazione.