ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

16 settembre 2021

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella tridimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left[\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}(x_1)^2 + \left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)x_1x_2 + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}(x_2)^2 + \omega_3^2(x_3)^2\right] \qquad (1),$$

dove x_1, x_2, x_3 sono le tre componenti dell'operatore posizione per la particella e $\vec{p}$ è il corrispondente vettore di operatori impulso

(1) Nel caso $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ determinare lo spettro della hamiltoniana data.

(2) Nelle condizioni della domanda precedente, determinare la degenerazione della hamiltoniana data.

(3) Nelle condizioni delle due domande precedenti, determinare la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana data.

(4) Supponendo ora sempre $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ma $\omega_3 \neq \omega$ determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana, nel caso generale in cui ω e ω_3 sono incommensurabili.

(5) Considerare la hamiltoniana $H' = T_3^{-1}(\delta)HT_3(\delta)$, dove $T_3(\delta)$ è l'operatore che realizza una traslazione di lunghezza δ lungo l'asse x_3:

$$T_3(\delta) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\delta p_3\right) \qquad (1)$$

e H è la hamiltoniana Eq. (1) nelle condizioni della domanda (4). Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana H'.

Suggerimento: ricordare le proprietà degli operatori unitariamente equivalenti.

(6) *Domanda di teoria*: dimostrare il teorema di degenerazione.

(7) Nel caso in cui $\omega_1 \neq \omega_2$ separare la hamiltoniana Eq. (1) nella somma di tre hamiltoniane commutanti mediante un'opportuno cambio di coordinate e determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana.

Suggerimento: Qual è la combinazione lineare delle coordinate x_1 e x_2 che diagonalizza il potenziale?

(8) Sempre nel caso in cui $\omega_1 \neq \omega_2$ considerare il termine proporzionale a x_1x_2 come una perturbazione. Determinare la correzione al primo ordine all'energia del primo stato eccitato dell'hamiltoniana, nel caso in cui $\omega_3 \gg \omega_1$ e $\omega_3 \gg \omega_2$.

(9) Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambio di coordinate della domanda (7) e scrivere esplicitamente nella base delle coordinate l'operatore hermitiano che genera questa trasformazione.

(10) Confrontare il risultato perturbativo della domanda (8) con quello esatto della domanda (7) e determinare il parametro perturbativo tale per cui il risultato perturbativo si ottiene sviluppando il risultato esatto al primo ordine.

(11) Supporre ora nella situazione della domanda (1), ossia $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$, che la hamiltoniana data descriva un sistema di tre fermioni in una sola dimensione, e che tali fermioni si trovino tutti nello stesso stato di spin. Determinare lo spettro della hamiltoniana H e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati in questo caso.