ESAME SCRITTO DI FISICA QUANTISTICA

14 settembre 2023

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{(\vec{p}^{(1)})^2}{2m} + \frac{(\vec{p}^{(2)})^2}{2m} + V[\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}] + V'[\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}, \vec{p}^{(1)} - \vec{p}^{(2)}] \tag{1}$$

dove $\vec{x^{(i)}}$, $\vec{p^{(i)}}$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle, ed i potenziali V e V' sono dati da

$$V(\vec{x}) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{m\omega'^2}{2}x_3^2, \tag{3}$$

$$V'(\vec{x}, \vec{p}) = \lambda p_2 x_1, \tag{4}$$

avendo definito

$$\vec{x} \equiv \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}; \qquad \vec{p} \equiv \vec{p}^{(1)} - \vec{p}^{(2)}, \tag{5}$$

con x_1, x_2, x_3 e p_1, p_2, p_3 le tre componenti dei vettori $\vec{x}$ e $\vec{p}$.

(1) Separare l'hamiltoniana in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.

(2) Determinare lo spettro della hamiltoniana nel caso $\lambda = 0$.

(3) Sempre con $\lambda = 0$, determinare la degenerazione dello spettro della hamiltoniana relativa sia nel caso generale che nel caso particolare in cui $\omega = \omega'$.

(4) Sempre con $\lambda = 0$, determinare la funzione d'onda di stato fondamentale per il sistema dato.

(5) Nel caso generale in cui $\lambda \neq 0$ e $\omega \neq \omega'$ determinare le equazioni del moto di Heisenberg per gli operatori posizione e impulso per il sistema dato.
Nota: le equazioni possono essere scritte a scelta per le coordinate delle due particelle oppure per le coordinate baricentrali e relative; la soluzione delle equazioni non è richiesta.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che se una hamiltoniana si può separare nella somma di due hamiltoniane commutanti allora i suoi autovalori sono rispettivamente la somma e le autofunzioni il prodotto degli autovalori e delle autofunzioni di queste due hamiltoniane commutanti.

(7) Considerare ora il caso in cui una delle due particelle ha spin $\frac{1}{2}$, e alla hamiltoniana Eq. (1) viene aggiunto un contributo di spin pari a

$$H_s = \vec{B} \cdot \vec{s}, \tag{6}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore costante a componenti reali e $\vec{s}$ è l'operatore di spin della particella avente spin $\frac{1}{2}$. Determinare lo spettro della hamiltoniana nel caso $\lambda = 0$, $\omega' = \omega$.
Nota: nelle domande 1-5 le particelle erano supposte essere senza spin.

(8) Sempre nel caso in cui una delle due particelle ha spin $\frac{1}{2}$ e con $\lambda = 0$, $\omega' = \omega$, il contributo di spin aggiunto alla hamiltoniana Eq. (1) invece che dalla Eq. (6) è ora dato da

$$H'_s = \kappa \vec{L} \cdot \vec{s}, \tag{7}$$

dove $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ e x, p sono gli operatori dati nelle Eq. (3-4); κ è una costante reale positiva. Determinare nuovamente lo spettro della hamiltoniana.
Suggerimento: ricordare che lo spettro di un oscillatore armonico isotropo di pulsazione ω può essere scritto in una base di autostati del momento angolare come $E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$ dove $N = 2n + \ell$, $n \geq 0$, e ℓ è un autovalore del momento angolare totale.

(9) Considerare il caso della hamiltoniana Eq. (1) in assenza di spin, con $\omega' \gg \omega \gg \lambda$. Trattare il termine proporzionale a λ come una perturbazione. Calcolare la perturbazione all'energia dello stato fondamentale della hamiltoniana relativa fino al secondo ordine in λ.
Suggerimento: esprimere la perturbazione in termini di operatori di creazione e distruzione.

(10) Nel caso della domanda precedente, determinare la base che diagonalizza la perturbazione all'energia del secondo livello eccitato della hamiltoniana relativa.

(11) Nel caso della domanda (9), dimostrare che lo spettro può essere determinato esattamente mediante una opportuna trasformazione di coordinate.
Nota: la forma esplicita della trasformazione di coordinate non è richiesta.