ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

27 gennaio 2015

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - q_1\vec{E}\cdot\vec{x}_1 - q_2\vec{E}\cdot\vec{x}_2 \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle, e $\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) di numeri reali.

(1) Separare l'hamiltoniana in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.

(2) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg (senza risolverle) per gli operatori posizione ed impulso e per l'operatore

$$\vec{D} = q_1\vec{x}_1 + q_2\vec{x}_2, \tag{2}$$

(momento di dipolo elettrico).

(3) Nel caso $q_1 = q_2$, determinare il valor medio di una misura del momento di dipolo al tempo t in termini di opportune condizioni iniziali al tempo $t = 0$, specificando quante e quali condizioni iniziali sono necessarie per determinare completamente il risultato.

(4) Supporre ora che le due particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$, e che la hamiltoniana contenga anche un termine di interazione spin-orbita:

$$H = H_0 + H_B, \tag{3}$$

con

$$H_B = -B\vec{L}\cdot\vec{s}, \tag{4}$$

dove $\vec{s}$ è l'operatore spin totale del sistema di due particelle, $\vec{L}$ è l'operatore momento angolare relativo del sistema di due particelle, e B è una costante reale. Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa in questo caso, in assenza di campo elettrico (cioé quando $\vec{E} = 0$).

Il calcolo della degenerazione è facoltativo.

(5) Nel caso in cui $B = 0$, considerare il campo elettrico $\vec{E}$ come una perturbazione, e determinare la correzione perturbativa fino al secondo ordine all'energia dello stato fondamentale del moto relativo per la hamiltoniana H Eq. (3). Determinare inoltre lo spettro di energia del moto relativo in modo esatto, e confrontare con il risultato perturbativo.

(6) Determinare nuovamente lo spettro e ora anche la degenerazione per la hamiltoniana (del moto relativo) al punto precedente, ma ora nel caso di particelle identiche.

(7) Determinare ancora una volta spettro e degenerazione della domanda precedente, ma in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare ω' intorno ad un asse $\vec{n}$ passante per il baricentro.