ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

29 gennaio 2018

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da n particelle di uguale massa m ed una particella di massa M, in una dimensione spaziale, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2M} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i, x_0) \right) \tag{1}$$

dove x_i, p_i, x_0, p_0 sono gli operatori posizione e impulso rispettivamente per le n particelle di massa m e per la particella di massa M, ed il potenziale $V(x_i, x_0)$ ha la forma

$$V(x_i, x_0) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i - x_0| \leq L \\ V_0 \text{ se } |x_i - x_0| > L \end{cases}, \tag{2}$$

dove $V_0 \to \infty$ e L è una costante reale e positiva.

(1) Separare la hamiltoniana H_0 Eq. (1-2) nella somma di $n+1$ hamiltoniane commutanti, considerando $\frac{m}{M}$ trascurabile ($\frac{m}{M} \ll 1$).

(2) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato per la hamiltoniana data, supponendo le n particelle di massa m non identiche e senza spin.

(3) Scrivere (senza risolverle) le equazioni del moto alla Heisenberg per il sistema separato trovato nella domanda (1).
Suggerimento: scrivere il potenziale usando la funzione a gradino theta e calcolare i commutatori.

(4) *Domanda di teoria:* dimostrare che se la funzione d'onda per un sistema di tre particelle identiche non è completamente simmetrica o completamente antisimmetrica, allora tutti gli autostati della hamiltoniana sono degeneri.

(5) Determinare nuovamente l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato, supponendo ora che le particelle date siano identiche e di spin $\frac{1}{2}$ e che il numero n di particelle sia pari.

(6) Considerare ora il caso $n = 3$, di tre particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$. Suppore che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + H_s \tag{3}$$

$$H_s = -\lambda \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 \right), \tag{4}$$

dove λ è una costante reale positiva. Determinare l'energia, la degenerazione, e la funzione d'onda (o le funzioni d'onda) dello stato fondamentale della hamiltoniana di spin H_s.
Suggerimento: osservare che tutti gli stati aventi lo stesso valore dello spin totale hanno la stessa simmetria.

(7) Determinare la funzione d'onda e l'energia totale per lo stato fondamentale della hamiltoniana complessiva H Eq. (3), nell'ipotesi $\lambda >> \Delta E$, dove ΔE è la separazione dei livelli energetici della hamiltoniana spaziale.

(8) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H_{\text{tot}} = H + H' + H'' \tag{5}$$

$$H' = \vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3) \tag{6}$$

$$H'' = \epsilon \vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2), \tag{7}$$

dove H è la hamiltoniana Eq. (3) e $\vec{B}$ è un vettore costante a componenti reali. Discutere, quando $\vec{B} \neq 0$, ma con $\epsilon = 0$, se e come cambia la degenerazione dello stato fondamentale della hamiltoniana H determinato alla domanda (6). Determinare i nuovi valori dell'energia corrispondenti agli stati che nel caso della domanda (6) erano degeneri. Determinare infine l'effetto sull'energia di questi stati del termine proporzionale ad ϵ, trattandolo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.