ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

28 gennaio 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una coppia di particelle di spin $\frac{1}{2}$ in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, con dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 + V_{12} \tag{1}$$

dove H_i sono hamiltoniane di singola particella aventi la forma

$$H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - q_i \vec{E} \cdot \vec{x}_i + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}_i^2 \tag{2}$$

e il potenziale di interazione a due corpi V_{12} è dato da

$$V_{12} = -m\omega^2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + \frac{\mu}{\hbar} \left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \right) \cdot \vec{S}; \tag{3}$$

$\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) a componenti reali, μ e q_i sono costanti reali positive, $\vec{L}_i$ sono i momenti angolari orbitali delle due particelle e $\vec{S}$ è lo spin totale delle sistema di due particelle.

(1) Separare l'hamiltoniana H_0 in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.

(2) Determinare l'energia dello stato fondamentale della hamiltoniana relativa nel caso in cui $q_1 = q_2$ e $\omega >> \mu$. Il risultato dipende dal fatto che le due particelle siano identiche o meno?

(3) *Domanda di teoria:* Dimostrare che se si compongono due momenti angolari $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ gli stati aventi terza componente del momento angolare totale pari a j_z sono combinazioni lineari degli stati aventi terze componenti m_1 ed m_2 dei due momenti angolari che soddisfano la relazione $j_z = m_1 + m_2$.

(4) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa nel caso in cui $\mu = 0$, ma $q_1 \neq q_2$. Determinare inoltre i valori medi degli operatori posizione ed impulso relativi in un qualunque autostato della hamiltoniana.

(5) Nel caso della domanda precedente, trattare ora il termine proporzionale a $\vec{E}$ come una perturbazione e determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo. Confrontare con il risultato esatto.

(6) Supporre ora che il campo elettrico $\vec{E}$ dipenda dal tempo e sia dato da

$$\vec{E}(t) = \vec{E} e^{-t/\tau} \Theta(t), \tag{4}$$

dove $\vec{E}$ è un vettore costante a componenti reali e Θ è la funzione a gradino (funzione di Heaviside)

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ 1 & t > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Supporre che il sistema sia preparato nello stato fondamentale della hamiltoniana relativa al tempo $t = 0^- = \lim_{\epsilon \to 0} -\epsilon$, cioè subito prima che la pertubazione venga accesa. Trattando il campo elettrico come perturbazione, determinare la probabilità che esso subisca una transizione a qualunque altro autostato della hamiltoniana imperturbata al tempo finale $t \to \infty$, utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine.

(7) Sempre in presenza del campo elettrico dipendente dal tempo dato alla domanda precedente, scrivere ora le equazioni alla Heisenberg per gli operatori

$$a_i = \sqrt{\frac{m_r \omega_r}{2\hbar}} \left(x_i + i \frac{p_i}{m_r \omega_r} \right), \tag{6}$$

dove m_r e ω_r sono rispettivamente la massa e la pulsazione della hamiltoniana relativa. Determinare $a_i(t)$ risolvendo queste equazioni. Utilizzare il risultato per calcolare la probabilità di transizione al punto precedente in modo esatto, sfruttando il fatto (di cui non è richiesta la dimostrazione) che (per il problema dato) l'ampiezza di transizione fra lo stato fondamentale al tempo $t = 0$, $|0(t = 0^-)\rangle$, e il primo stato eccitato al tempo $t = \infty$, $|1(t = \infty)\rangle$ è data da

$$\langle 1(t = \infty) | 0(t = 0^-) \rangle = \lim_{t \to \infty} \langle 0(t = 0^-) | a(t) | 0(t = 0^-) \rangle. \tag{7}$$

Confrontare con il risultato esatto della domanda precedente.