

ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

26 febbraio 2015

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema (atomo di elio) formato da due particelle identiche di massa m e spin $\frac{1}{2}$ (elettroni) che si muovono nel potenziale di una terza particella (nucleo), il cui moto viene trascurato. Detti $\vec{x}_1, \vec{p}_1, \vec{x}_2$ e \vec{p}_2 gli operatori posizione ed impulso dei due elettroni, ed e una costante reale (carica dell'elettrone), l'hamiltoniana dell'atomo di elio è

$$H = H_0 + H_{12} \quad (1)$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_2|} \quad (2)$$

$$H_{12} = \frac{2e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \quad (3)$$

- (1) Determinare l'energia e la funzione d'onda spaziale (cioè non di spin) dello stato fondamentale dell'hamiltoniana H_0 sistema, e l'energia del primo stato eccitato. Non è necessario tenere conto del fatto che i due elettroni sono particelle identiche, e non è necessario determinare la normalizzazione.
- (2) Nello stato fondamentale trovato, determinare il valor medio della distanza $|\vec{x}_i|$ di ciascuno dei due elettroni dal nucleo.
- (3) Determinare la funzione d'onda di spin per lo stato fondamentale e la funzione d'onda totale per il primo stato eccitato trovati al punto (1) in termini di funzioni d'onda dell'atomo di idrogeno, trattando i due elettroni come particelle identiche. Non è necessario scrivere esplicitamente la forma delle funzioni d'onda idrogenoidi. Il risultato della domanda (1) cambia a seconda che gli elettroni siano trattati come particelle identiche o meno?
- (4) Determinare la degenerazione degli stati considerati alla domanda precedente.
- (5) Considerare ora H_{12} come una perturbazione e determinare se l'energia dello stato fondamentale di H_0 perturbato al primo ordine sia minore, maggiore, od uguale a quella imperturbata.
- (6) Calcolare il valor medio dell'operatore di dipolo magnetico

$$\vec{\mu} = \kappa \left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + 2\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2 \right), \quad (5)$$

dove κ è una costante reale positiva, nello stato fondamentale della domanda (1). Determinare inoltre a tutti gli ordini perturbativi la correzione all'energia di questo stato dovuta ad una perturbazione della forma

$$H' = \vec{B} \cdot \vec{\mu}, \quad (6)$$

dove \vec{B} è un vettore a componenti reali.

- (7) Determinare ora la correzione al primo ordine al primo stato eccitato discusso alle domande (3-4), supponendo il momento angolare orbitale pari a $l = 0$, dovuta a H_{12} trattata come perturbazione, e discutere il suo effetto sulla degenerazione. Anche in questo caso non è richiesto calcolare gli integrali.
- (8) Considerare un atomo di elio che al tempo $t = 0$ ha un elettrone nello stato fondamentale idrogenoide ed un altro elettrone nel primo stato eccitato idrogenoide con $l = 0$. L'elettrone nello stato fondamentale ha spin su e quello nel primo stato eccitato ha spin giù rispetto all'asse z . Determinare la funzione d'onda del sistema ad ogni tempo t , trascurando H_{12} ma supponendo che sul sistema agisca la perturbazione Eq. (6), con \vec{B} diretto lungo l'asse x .